

**UNIVERSITÀ DI PISA**



**Facoltà di Ingegneria**

**Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione**

Tesi di laurea

**CONTROLLO ROBUSTO DI UN QUADROTOR**

**MEDIANTE METODI DI LOOP SHAPING**

Tesi di laurea svolta presso la Technische Universität (Berlino, Germania).

Candidato:

*Alessandro Paolinelli*

Relatori:

*Ch.mo Prof. Ing. Mario Innocenti*

*Ch.mo Prof. Ing. Lorenzo Pollini*

Sessione di Laurea del 05/06/2007  
Anno accademico 2006/2007

# SOMMARIO

---

Il lavoro presenta lo studio e l'applicazione del controllo robusto su velivoli aerei non pilotati (UAVs): nello specifico si sono sviluppati due controllori per un Quadrotor.

Il primo regolatore si basa sulla tecnica di controllo *LTR* (*Loop Transfer Recovery*), sviluppato partendo dal *filtro di Kalman* precedentemente realizzato per la stima di angoli.

Il secondo regolatore si basa su una tecnica di controllo *H infinito*, la *Normalized Coprime Factor (NCF)* in quanto risulta decisamente valida per questa tipologia di sistemi.

Per entrambi i controllori si è reso necessario un precedente studio del comportamento dei motori *brush-less*, per poterne studiare le principali caratteristiche.

Per la gestione del ritardo si è inserito un'approssimazione nel modello ed è stato ulteriormente controllato mediante un *disturbance observer*.

Si sono fatte prove di simulazione e test di hovering reali per entrambi i controllori.

Infine, per il controllore *NCF*, sono state effettuate anche delle prove di trasporto carico in due configurazioni differenti.

# ABSTRACT

---

This work presents the development of two robust controller for unmanned aerial vehicles (UAVs), in this case, for a particular category of them, a Quadrotor.

The first regulator is based on the LTR technique, developed starting from a Kalman filter previously realized (for observing angles).

The second regulator is based on a H infinity technique, the Normalized Coprime Factor: this type of technique give very good performance with this type of systems.

For both regulators it has been done even a motor test for evaluate his features.

The delay has been modelled and even controlled by a disturbance observer.

Both controller were tested on the hovering problem.

For the *NCF* controller were performed even load transport test with two different configuration.

# INDICE

---

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>8</b>
1.1	COS'È UN QUADROTOR? .....	8
1.2	IL PROGETTO AWARE .....	9
1.3	MOTIVAZIONI .....	10
<b>2</b>	<b>MODELLO.....</b>	<b>12</b>
2.1	DESCRIZIONE DEL SISTEMA QUAD.....	12
2.2	CINEMATICA.....	13
2.3	DINAMICA .....	14
2.4	LINEARIZZAZIONE .....	16
2.5	CONVERSIONE F/T IN SERVO.....	17
2.6	ARCHITETTURA INDOOR .....	20
<b>3</b>	<b>TEST MOTORE.....</b>	<b>22</b>
3.1	SET UP SPERIMENTALE .....	22
3.2	RISULTATI .....	24
3.3	DELAY.....	28
<b>4</b>	<b>FILTRO DI KALMAN .....</b>	<b>32</b>
4.1	MOTIVAZIONI .....	32
4.2	TEORIA .....	33
4.3	MATRICI DI COVARIANZA.....	34
4.4	RISULTATI .....	35

<b>5</b>	<b>CONTROLLO ROBUSTO .....</b>	<b>37</b>
5.1	FRAMEWORK GENERICA .....	37
5.2	MATRICI DI ROTAZIONE .....	38
5.3	INTRODUZIONE AI METODI LOOP SHAPING .....	40
5.4	LOOP TRANSFER RECOVERY (LTR) .....	42
5.5	PARAMETRI LTR.....	44
5.6	RISULTATI LTR (SIMULAZIONE).....	45
5.7	NORMALIZED COPRIME FACTOR (NCF) .....	47
5.7.1	DEFINIZIONI .....	47
5.7.2	RAPPRESENTAZIONE INCERTEZZE.....	49
5.7.3	PROBLEMA DI ROBUSTEZZA .....	51
5.7.4	PROPRIETÀ.....	54
5.8	PARAMETRI NCF .....	55
5.9	RISULTATI NCF (SIMULAZIONE).....	59
5.10	CONFRONTO LTR-NCF (SIMULAZIONE) .....	62
5.11	DISTURBANCE OBSERVER .....	63
5.12	FRAMEWORK SISTEMA QUAD .....	64
5.13	RISULTATI DISTURBANCE OBSERVER (SIMULAZIONE) .....	65
5.14	RISULTATI VOLI REALI .....	71
<b>6</b>	<b>TRASPORTO CARICHI.....</b>	<b>74</b>
6.1	INTRODUZIONE .....	74
6.2	STRUTTURA 4 REGGENTI.....	77
<b>7</b>	<b>CONCLUSIONI .....</b>	<b>80</b>
7.1	ROBUSTEZZA DEL CONTROLLO .....	80
7.2	SVILUPPI FUTURI .....	80
	<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>84</b>

## INDICE DELLE FIGURE

---

<i>Figura 1.1 – Quadrotor .....</i>	<i>8</i>
<i>Figura 1.2 – Esempio di utilizzo in situazioni critiche.....</i>	<i>10</i>
<i>Figura 1.3 – Esempio di utilizzo monitoraggio ambiente .....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 1.4 – Esempio di utilizzo riprese cinema/TV.....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 2.1 – Schematizzazione Quadrotor SolidWorks 2003.....</i>	<i>12</i>
<i>Figura 2.2 – Senso di rotazione per un corretto hovering .....</i>	<i>13</i>
<i>Figura 2.3 – Sistema di riferimento assi fisso e assi corpo.....</i>	<i>13</i>
<i>Figura 2.4 – Schema Simulink linearizzazione numerica .....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 2.5 – Schema conversione forze, momenti in comandi servo.....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 2.6 – Schematizzazione calcolo forze equivalenti .....</i>	<i>18</i>
<i>Figura 2.7 – Architettura laboratorio.....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 2.8 – Elettronica di bordo.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 3.1 – Set up sperimentale motore .....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 3.2 – Schematizzazione motore e sensori.....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 3.3 – Motore .....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 3.4 – Andamento forza.....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 3.5 – Andamento Momento .....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 3.6 – Rampa Forza.....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 3.7 – Rampa Momento.....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 3.8 – <math>C_T</math>.....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 3.9 – <math>C_F</math>.....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 3.10 – <math>\zeta</math>.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 3.11 – Andamento Servo-Forza.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 3.12 – Andamento Forza-Servo.....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 3.13 – Risposta Servo-Rpm.....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 3.14 – Risposta gradino.....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 3.15 – Padè.....</i>	<i>31</i>
<i>Figura 4.1 – Struttura generale osservatore .....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 4.2 – Struttura Filtro di Kalman .....</i>	<i>34</i>
<i>Figura 4.3 – Stima di <math>q_4</math>.....</i>	<i>35</i>

<i>Figura 4.4 – Stima di <math>q_4</math> (Particolare)</i> .....	35
<i>Figura 4.5 – Stima di <math>q_5</math></i> .....	36
<i>Figura 4.6 – Stima di <math>q_5</math> (Particolare)</i> .....	36
<i>Figura 5.1 – Framework K-G</i> .....	37
<i>Figura 5.2 – Framework Controllore</i> .....	39
<i>Figura 5.3 – Andamento Valori Singolari</i> .....	41
<i>Figura 5.4 – Struttura controllore LQG</i> .....	42
<i>Figura 5.5 – Andamento valori singolari LTR</i> .....	44
<i>Figura 5.6 – <math>q_1, q_2, q_3</math> LTR (Simulazione)</i> .....	45
<i>Figura 5.7 – <math>q_4, q_5, q_6</math> LTR (Simulazione)</i> .....	46
<i>Figura 5.8 – <math>u_1, u_2, u_3</math> LTR (Simulazione)</i> .....	46
<i>Figura 5.9 – <math>u_4, u_5, u_6</math> LTR (Simulazione)</i> .....	47
<i>Figura 5.10 – Incertezza Additiva</i> .....	49
<i>Figura 5.11 – Incertezza Moltiplicativa</i> .....	50
<i>Figura 5.12 – Incertezze NCF</i> .....	51
<i>Figura 5.13 – Loop Shaping NCF</i> .....	55
<i>Figura 5.14 – Framework controllore NCF</i> .....	55
<i>Figura 5.15 – Valori singolari G</i> .....	56
<i>Figura 5.16 – Valori singolari <math>G_s</math></i> .....	57
<i>Figura 5.17 – Algoritmo progettazione controllore NCF</i> .....	58
<i>Figura 5.18 – <math>q_1, q_2, q_3</math> NCF (Simulazione)</i> .....	59
<i>Figura 5.19 – <math>q_4, q_5, q_6</math> NCF (Simulazione)</i> .....	60
<i>Figura 5.20 – <math>u_1, u_2, u_3</math> NCF (Simulazione)</i> .....	60
<i>Figura 5.21 – <math>u_4, u_5, u_6</math> NCF (Simulazione)</i> .....	61
<i>Figura 5.22 – <math>q_1, q_2</math> LTR-NCF (Simulazione)</i> .....	62
<i>Figura 5.23 – <math>q_3</math> LTR-NCF (Simulazione)</i> .....	62
<i>Figura 5.24 – Framework generica Disturbance Observer</i> .....	63
<i>Figura 5.25 – Disturbance Observer per il Quad</i> .....	64
<i>Figura 5.26 – <math>q_1, q_2, q_3</math> LTR+DO</i> .....	65
<i>Figura 5.27 – <math>q_1, q_2, q_3</math> LTR+DO (Particolare)</i> .....	66
<i>Figura 5.28 – <math>q_4, q_5, q_6</math> LTR+DO</i> .....	66
<i>Figura 5.29 – <math>u_1, u_2, u_3</math> LTR+DO</i> .....	67
<i>Figura 5.30 – <math>u_4, u_5, u_6</math> LTR+DO</i> .....	67
<i>Figura 5.31 – <math>q_1, q_2, q_3</math> NCF+DO</i> .....	68
<i>Figura 5.32 – <math>q_1, q_2, q_3</math> NCF+DO (Particolare)</i> .....	69
<i>Figura 5.33 – <math>q_4, q_5, q_6</math> NCF+DO</i> .....	69
<i>Figura 5.34 – <math>u_1, u_2, u_3</math> NCF+DO</i> .....	70
<i>Figura 5.35 – <math>u_4, u_5, u_6</math> NCF+DO</i> .....	70
<i>Figura 5.36 – <math>q_1, q_2, q_3</math> LTR (Volo Reale)</i> .....	71
<i>Figura 5.37 – <math>q_1, q_2, q_3</math> NCF (Volo Reale)</i> .....	72

<i>Figura 5.38 – <math>q_4, q_5, q_6</math> LTR (Volo Reale).....</i>	<i>72</i>
<i>Figura 5.39 – <math>q_4, q_5, q_6</math> NCF (Volo Reale).....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 6.1 – Trasporto pesi fra UAVs in cooperazione.....</i>	<i>74</i>
<i>Figura 6.2 – Carico fissato direttamente alla struttura del Quad.....</i>	<i>75</i>
<i>Figura 6.3 – <math>q_1</math> Trasporto Carichi (Fissaggio Diretto).....</i>	<i>75</i>
<i>Figura 6.4 – <math>q_2</math> Trasporto Carichi (Fissaggio Diretto).....</i>	<i>76</i>
<i>Figura 6.5 – <math>q_3</math> Trasporto Carichi (Fissaggio Diretto).....</i>	<i>76</i>
<i>Figura 6.6 – Carico fissato al Quad tramite struttura a 4 (ideale) .....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 6.7 – Carico fissato al Quad tramite struttura a 4 (reale).....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 6.8 – <math>q_1, q_2, q_3</math> Trasporto Carichi (Struttura a 4).....</i>	<i>78</i>
<i>Figura 6.9 – <math>q_4, q_5, q_6</math> Trasporto Carichi (Struttura a 4).....</i>	<i>79</i>
<i>Figura 7.1 – Framework alternativa NCF.....</i>	<i>81</i>
<i>Figura 7.2 – <math>q_1, q_2, q_3</math> NCF framework alternativa.....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 7.3 – <math>q_4, q_5, q_6</math> NCF framework alternativa.....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 7.4 – <math>u_1, u_2, u_3</math> NCF framework alternativa.....</i>	<i>83</i>
<i>Figura 7.5 – <math>u_4, u_5, u_6</math> NCF framework alternativa.....</i>	<i>83</i>
<i>Figura D.1 – <math>q_1</math> DEMO.....</i>	<i>99</i>
<i>Figura D.2 – <math>q_2</math> DEMO.....</i>	<i>99</i>
<i>Figura D.3 – <math>q_3</math> DEMO.....</i>	<i>100</i>
<i>Figura D.4 – <math>q_4, q_5, q_6</math> DEMO.....</i>	<i>100</i>

## **1.1 Cos'è un Quadrotor?**

Un Quadrotor, anche chiamato Quadrotor helicopter, è un velivolo aereo il cui movimento è generato tramite quattro sistemi motore-elica.



*Figura 1.1 – Quadrotor*

I primi Quadrotor vennero pensati per il trasporto di passeggeri ma le scarse performance e lo sforzo richiesto al pilota per la guida hanno da tempo fatto abbandonare questa direzione di sviluppo. Oggigiorno i Quadrotor sono progettati per essere unmanned aerial vehicles (UAVs).

I vantaggi di questo tipo di velivoli rispetto agli elicotteri sta nella loro maggior facilità di realizzazione, tempi di manutenzione e costi.

Inoltre la presenza di quattro motori permette di ridurre la dimensione delle eliche a parità di prestazioni richieste rendendo il Quadrotor molto più sicuro per voli indoor e in presenza di oggetti.



## 1.2 Il progetto AWARE

AWARE è una sigla che nasce dal nome completo del progetto : “Platform for Autonomous self-deploying and operation of Wireless sensor-actuator networks cooperating with AeRial objEcts”.

Si tratta di un progetto dell’Unione Europea di durata Triennale (Giugno 2006 - Maggio 2009) che ha come obiettivo lo sviluppo di una piattaforma che permetta il volo e la cooperazione fra più UAVs (es. trasporto pesi), assicurando una comunicazione wireless verso la postazione terrestre. A questo progetto aderiscono diversi soggetti:



### **AICIA (Project Coordinator)**

The Association of Research and Industrial Co-operation of Andalucia, associazione collegata all’Università di Siviglia.



### **PDV**

(Prozessdatenverarbeitung und Robotik), the Real-Time Systems and Robotics group presso la Technischen Universität di Berlino.



### **Flying Cam**

Azienda per l’applicazione di elicotteri alla cinematografia.



### **CTIT**

(Centre for Telematics and Information Technology) presso l’Università di Twente, Utrecht.



### **IPVS**

(Institute of Parallel and Distributed Systems) presso l’Università di Stoccarda.



### **SELEX Sensors and Airborne Systems Ltd**

Azienda inglese di sistemi elettronici.



### **ITURRI**

Gruppo Spagnolo.

## 1.3 Motivazioni

Gli UAVs hanno da tempo attirato l'attenzione di università e mondo industriale. I principali motivi sono da ricercarsi nella loro elevata manovrabilità e nella possibilità di uno sviluppo a basso costo.

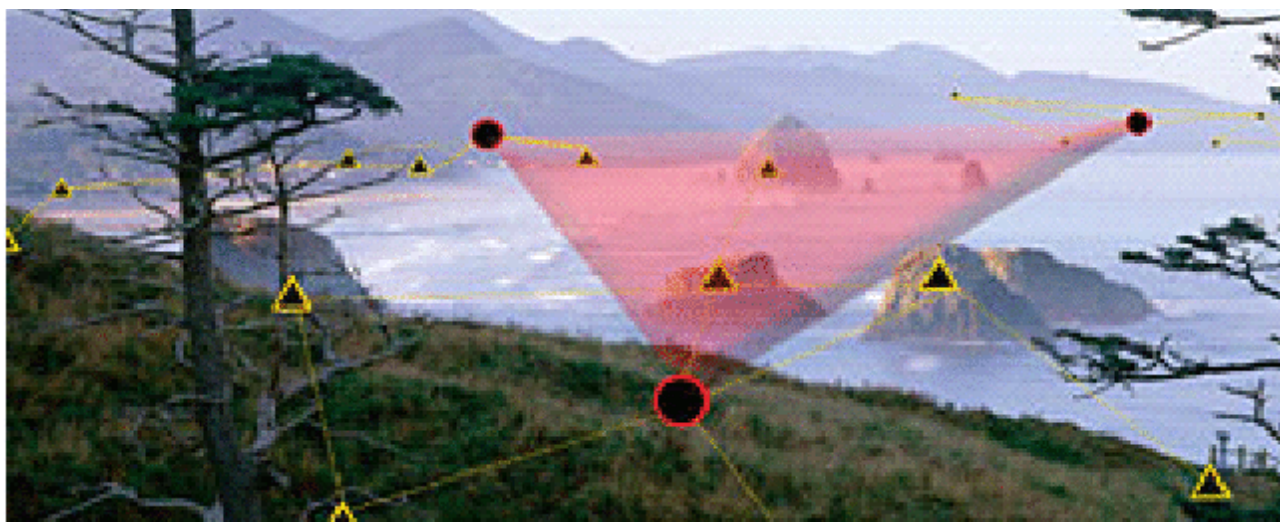
Il loro vasto campo d'impiego, infine, rappresenta sicuramente il punto di forza più rilevante per questo tipo di robot:

- Ricerca e Salvataggio : Il loro impiego per la ricerca e il trasporto in sicurezza di persone coinvolte in situazioni pericolose (es. incendi, radioattività, disastri chimici) risulta di gran lunga preferibile all'utilizzo di un elicottero reale con pilota. Innanzitutto per la presenza del pilota stesso, il quale metterebbe comunque a repentaglio la propria vita, secondariamente per la velocità e la possibilità di arrivare in luoghi che potrebbero essere inaccessibili viste le dimensioni e la manovrabilità del veicolo pilotato.



*Figura 1.2 – Esempio di utilizzo in situazioni critiche*

- Sorveglianza : Gli UAV possono essere impiegati anche per monitorizzare ventiquattro ore al giorno determinate aree, pronti a segnalare qualsiasi tipo di attività sospetta. Possono anche essere d'aiuto alle forze dell'ordine nella ricerca e/o nell'inseguimento di criminali.
- Natura : Gli UAV possono essere utilizzati per il monitoraggio di ambienti di particolare interesse dal punto di vista della flora e della fauna, per la protezione, la salvaguardia o l'esplorazione (es. Foresta Amazzonica).



*Figura 1.3 – Esempio di utilizzo monitoraggio ambiente*

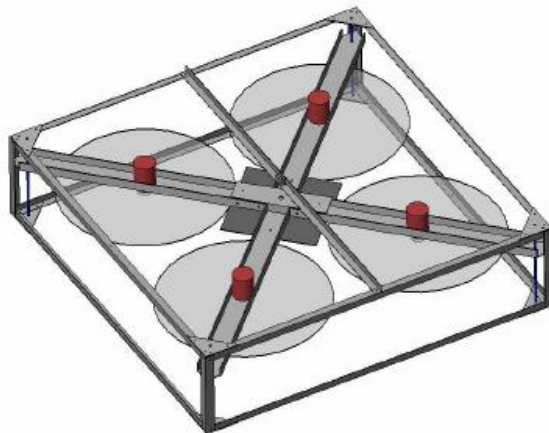
- Cinema/TV : Gli UAV possono essere utilizzati anche per girare scene che richiedono riprese in volo (es. documentari, effetti speciali) oppure per seguire manifestazioni sportive.



*Figura 1.4 – Esempio di utilizzo riprese cinema/TV*

## 2.1 Descrizione del sistema Quad

Si consideri il Quadrotor come un corpo unico dotato di quattro motori ed eliche indipendenti fra di loro. Ogni motore è di tipo Brush-less (Kontronik Kora 25) ed è comandato da un apposito controllore (Kontronik Jazz 55-10-32). Ogni elica (VariProp) ha diametro pari a 39 cm.

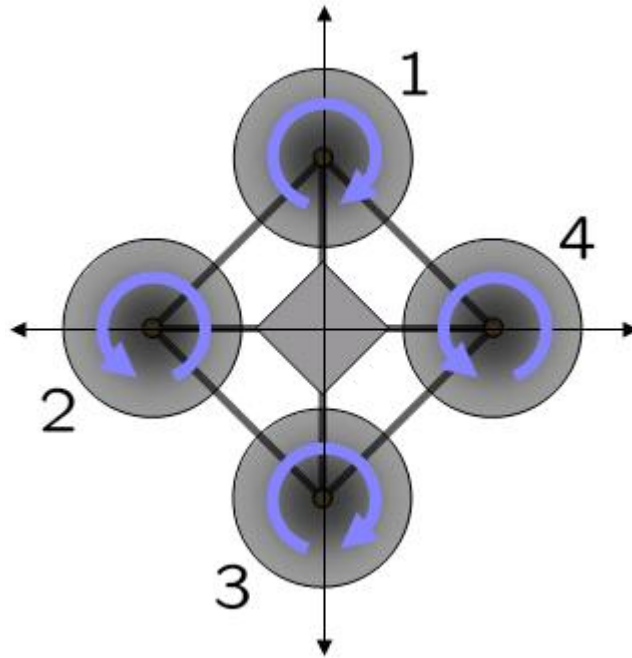


*Figura 2.1 – Schematizzazione Quadrotor SolidWorks 2003*

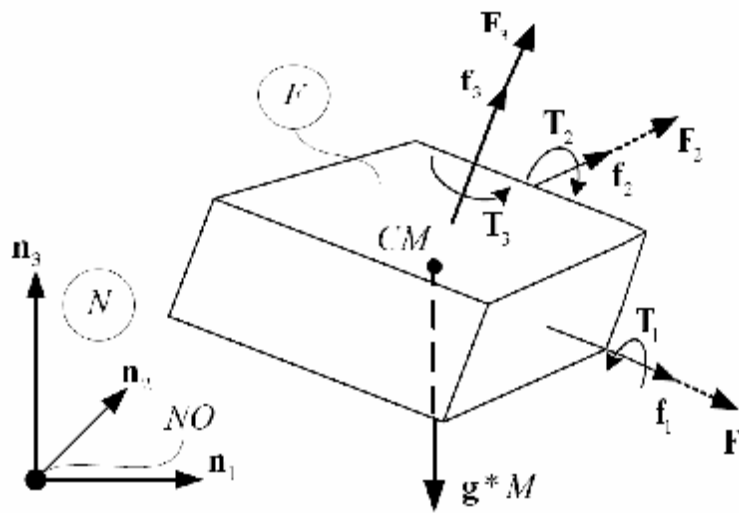
Si è deciso di controllare il Quadrotor, come suggerito in [13], [14] e [15], tramite una forza lungo l'asse Z,  $F_3$  (forza di lifting), e tre momenti  $T_1, T_2, T_3$  rispettivamente lungo gli assi X, Y, Z che permettano un cambio d'orientazione in maniera indipendente.

Il Quadrotor è in grado di generare anche le forze  $F_1$  e  $F_2$ , che non necessitano di essere indipendenti da  $F_3$  e  $T_1, T_2, T_3$ .





*Figura 2.2 – Senso di rotazione per un corretto hovering*



*Figura 2.3 – Sistema di riferimento assi fisso e assi corpo*

## 2.2 Cinematica

A partire dalla schematizzazione di figura 2.3 s'introducono sei coordinate generalizzate  $q_i, i = 1, \dots, 6$  e sei velocità generalizzate  $u_i, i = 1, \dots, 6$ .

Le coordinate  $q_1, q_2, q_3$  descrivono la posizione del punto di riferimento  $CM$  (Center of Mass).

$$r_{NO-CM} = q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3 \quad (2.1)$$

Le velocità  $u_1, u_2, u_3$  il suo movimento.

$$v_{CM}^N = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 \quad (2.2)$$

Le coordinate generalizzate  $q_4, q_5, q_6$  sono gli angoli di Eulero che descrivono l'orientazione del corpo nel sistema di riferimento mobile  $f$  rispetto al sistema di riferimento fisso  $n$ .

Le velocità angolari di  $f$  in  $n$  sono descritte dalla seguente relazione:

$$w_{F-N} = u_4 f_1 + u_5 f_2 + u_6 f_3 \quad (2.3)$$

Dalle definizioni appena date delle variabili generalizzate si possono dedurre le seguenti equazioni cinematiche per la traslazione:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= u_1 \\ \dot{q}_2 &= u_2 \\ \dot{q}_3 &= u_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

e per la rotazione:

$$\begin{aligned} \dot{q}_4 &= \frac{-(\sin(q_6) * u_5 - \cos(q_6) * u_4)}{\cos(q_5)} \\ \dot{q}_5 &= \sin(q_6) * u_4 + \cos(q_6) * u_5 \\ \dot{q}_6 &= u_6 + \tan(q_5) * (\sin(q_6) * u_5 - \cos(q_6) * u_4) \end{aligned} \quad (2.5)$$

## 2.3 Dinamica

Le seguenti equazioni descrivono la dinamica traslazionale del punto di riferimento  $CM$  rispetto ad  $N$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} M = R_{f-n} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gM \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$R_{f-n}$  è la matrice di rotazione.

Ricordando che si è deciso di controllare il Quadrotor solo tramite  $F_3$ , si ottengono le seguenti equazioni finali:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \frac{(F_3 \sin(q_5))}{M} \\ \dot{u}_2 &= \frac{(-F_3 \cos(q_4) \cos(q_5))}{M} \\ \dot{u}_3 &= \frac{(F_3 \cos(q_4) \cos(q_5) - gM)}{M} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Per quanto riguarda le dinamiche rotazionali si è considerato il Quadrotor come un elemento composto da 4 corpi rigidi: 1 fusoliera e 4 motori.

Due di essi hanno velocità di rotazione positiva mentre gli altri due negativa.

A causa di questa compensazione dovuta alla rotazione in senso opposto delle due coppie di motori, la dinamica di rotazione di un Quadrotor è data soprattutto dagli effetti d'inerzia della fusoliera ed è possibile scrivere le seguenti equazioni di Eulero:

$$\begin{aligned} T_1 + (I_{33} - I_{22})u_5u_6 - I_{11}\dot{u}_4 &= 0 \\ T_2 - (I_{33} - I_{11})u_4u_6 - I_{22}\dot{u}_5 &= 0 \\ T_3 + (I_{22} - I_{11})u_4u_5 - I_{33}\dot{u}_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dal modello costruito con SolidWorks (cfr. figura 2.1) si è valutata l'entità delle inerzie rispetto al centro di massa ed ai tre assi  $f_1, f_2, f_3$  :

$$I_{11} = I_{22} = I, I_{33} = 2I \quad (2.9)$$

Andando quindi a sostituire le 2.9 nelle 2.8 otteniamo la forma finale:

$$\begin{aligned} \dot{u}_4 &= \frac{(T_1 - I^*u_5u_6)}{I} \\ \dot{u}_5 &= \frac{(T_2 + I^*u_4u_6)}{I} \\ \dot{u}_6 &= \frac{T_3}{2I} \end{aligned} \quad (2.10)$$

## 2.4 Linearizzazione

Il sistema è dunque non lineare nella forma

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.16)$$

Per ottenere le matrici che descrivono l'evoluzione dello stato si è calcolato lo Jacobiano:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x(0), u(0)} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x(0), u(0)} \quad (2.17)$$

A partire da condizioni iniziali nulle:

$$\begin{aligned} x_0 &= (q_1(0), q_2(0), q_3(0), q_4(0), q_5(0), q_6(0), u_1(0), u_2(0), u_3(0), u_4(0), u_5(0), u_6(0)) = 0 \\ u_0 &= (F_3(0), T_1(0), T_2(0), T_3(0)) = (gM, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Si ottiene:

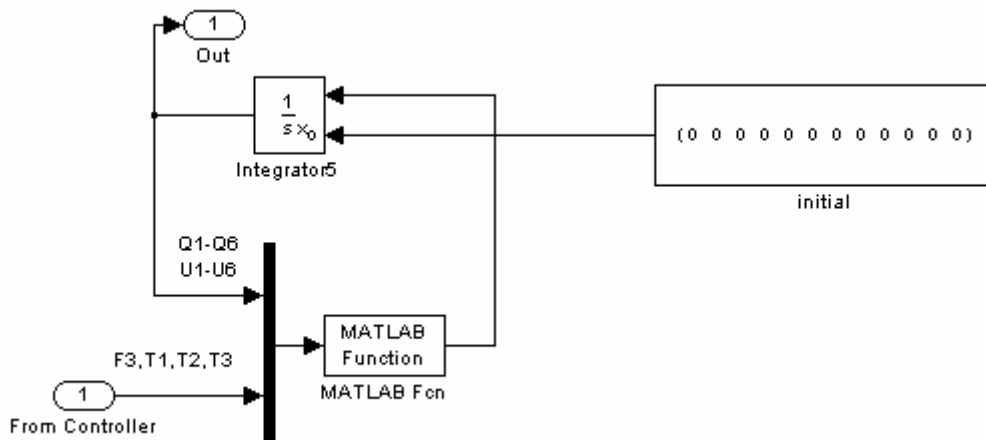
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2I} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Per quanto riguarda l'equazioni d'uscita:

$$\begin{aligned} y &= Cx + Du \\ C &= I_{12 \times 12} \quad D = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$



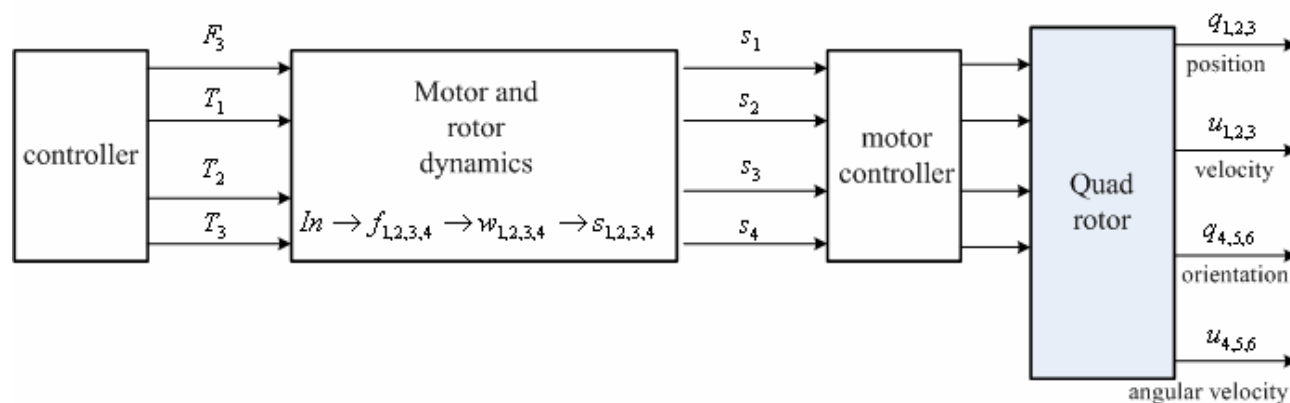
Si è convalidato il risultato ottenuto procedendo anche ad una linearizzazione numerica effettuata tramite MatLab.



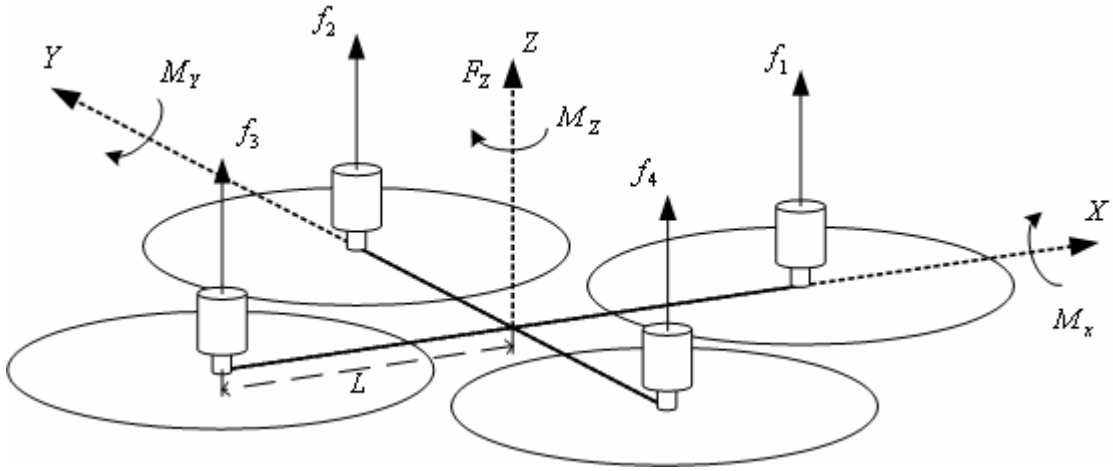
**Figura 2.4** – Schema Simulink linearizzazione numerica

## 2.5 Conversione F/T in servo

Il sistema richiede infine una conversione dall'output del controllore nei comandi da inviare al controller del motore.



**Figura 2.5** – Schema conversione forze, momenti in comandi servo



**Figura 2.6** – Schematizzazione calcolo forze equivalenti

Si è scelto di approssimare i blocchi tra il controllore del sistema ed i controllori dei motori tramite relazioni lineari partendo dal calcolo di  $f_1, f_2, f_3, f_4$  (cfr. figura 2.4).

$$\begin{aligned}
 F_z = F_3 &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \\
 M_x = T_1 &= L(f_2 - f_4) \\
 M_y = T_2 &= L(f_3 - f_1) \\
 M_z = T_3 &= V(f_1 - f_2 + f_3 - f_4)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{1}{4}F_3 - \frac{1}{2L}T_2 + \frac{1}{4V}T_3 \\
 f_2 &= \frac{1}{4}F_3 + \frac{1}{2L}T_1 - \frac{1}{4V}T_3 \\
 f_3 &= \frac{1}{4}F_3 + \frac{1}{2L}T_2 + \frac{1}{4V}T_3 \\
 f_4 &= \frac{1}{4}F_3 - \frac{1}{2L}T_1 - \frac{1}{4V}T_3
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Dove:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{C_T}{C_F} r \\
 C_F &= \frac{F_z}{r^4 \omega^2} \\
 C_T &= \frac{T_z}{r^5 \omega^2}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Per passare alle velocità:

$$w_{1,2,3,4} = \frac{1}{\sqrt{r^4 C_F}} \sqrt{f_{1,2,3,4}} \quad (2.14)$$

Finendo con i comandi servo da dare ai controllori dei motori:

$$s_{1,2,3,4} = k_s * w_{1,2,3,4} + \Delta_s \quad (2.15)$$

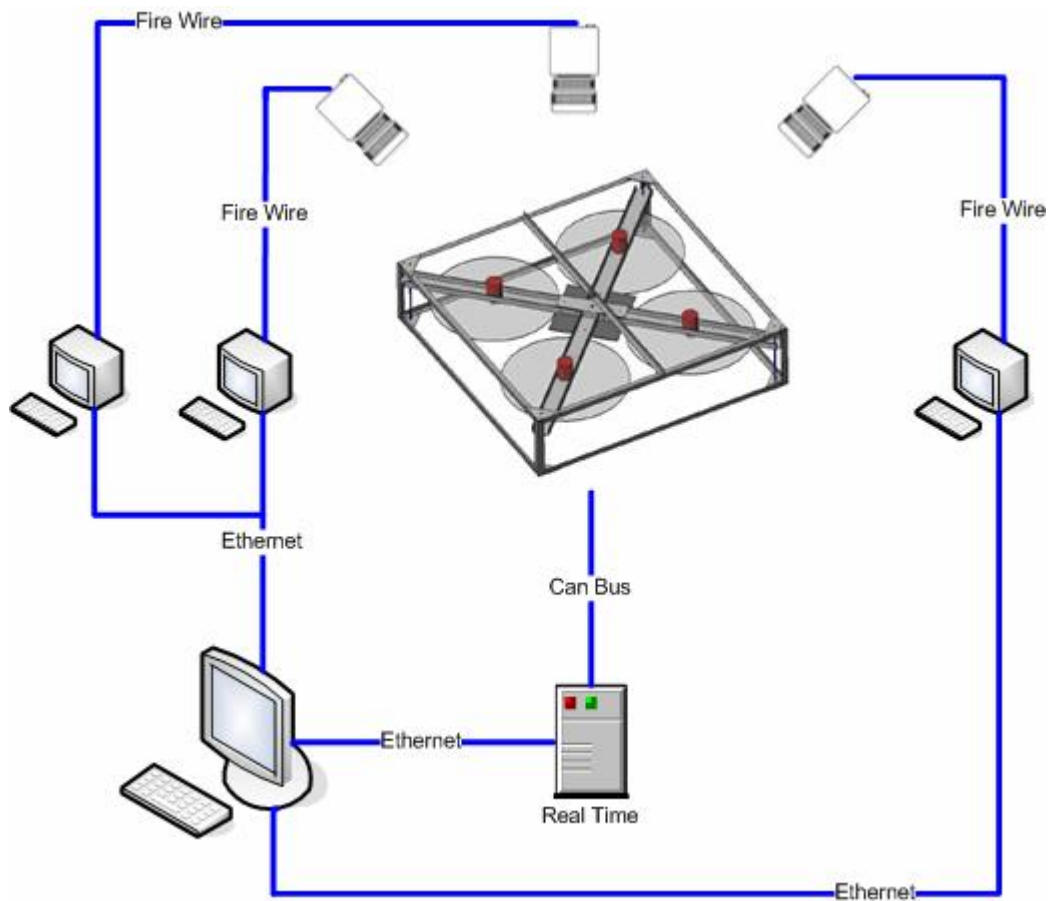
Dove  $\Delta_s$  rappresenta un offset determinato sperimentalmente.

I valori di  $C_F$  e  $C_T$  sono stati determinati tramite i test effettuati sul motore (a tale proposito si confronti il Capitolo 3).

## 2.6 Architettura indoor

Per poter effettuare voli all'interno del laboratorio si è predisposta un architettura di sistema composta da i seguenti elementi:

- Un desktop PC
- Una piattaforma Real-Time
- Un sistema di Motion-Tracking
- Un Quadrotor con elettronica di bordo (MCU e IMU)



**Figura 2.7** – Architettura laboratorio

Si può notare dall'immagine precedente la struttura dei collegamenti fra i vari elementi.

Sul PC standard viene eseguito MatLab<sup>®</sup> sul quale vengono fatte prima le simulazioni, per poi andare a valutare il controllore applicandolo direttamente al Quadrotor.

Esso comunica con un computer Real-Time il quale gestisce la comunicazione da e verso il Quadrotor tramite un Field Bus, il Controller Area Network (CAN) Bus.

Sulla piattaforma Real-Time gira il sistema operativo Windows CE<sup>®</sup>.

L'MCU (Siemens) del Quadrotor pilota i controllori dei motori (in base ai comandi che arrivano dal CAN), trasmette i dati dell'IMU, permette l'eventuale pilotaggio tramite radiocomando (utilizzato soprattutto in partenza per verificare la corretta rotazione delle eliche) e comunica tramite led se tutti i componenti sono collegati e funzionanti.

L'IMU del Quadrotor è costituita essenzialmente da tre giroscopi (ADXRS 300) orientati lungo i tre assi, in modo tale da fornire le tre velocità angolari.



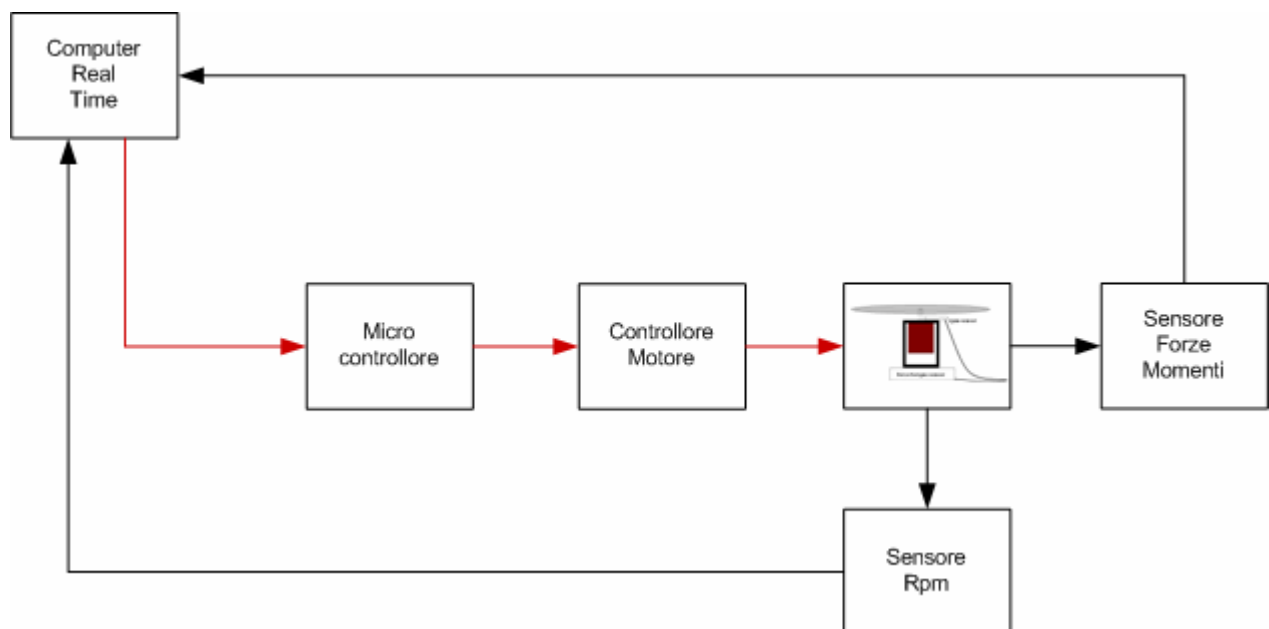
*Figura 2.8 – Elettronica di bordo*

Il sistema di Motion-Tacking è composto da 3 telecamere collegate tramite Fire-Wire ad altrettanti desktop PC: si è effettuata tale scelta per evitare un possibile Overflow di informazioni e quindi il decadimento del sistema (nel caso tutte le telecamere fossero collegate ad un unico PC). L'invio e la ricezione dei dati avviene ad una frequenza di 100 Hz.

### 3.1 Set up sperimentale

Per valutare le caratteristiche rilevanti per un corretto funzionamento del nostro controllore si è deciso di sottoporre a test uno dei quattro motori del Quadrotor.

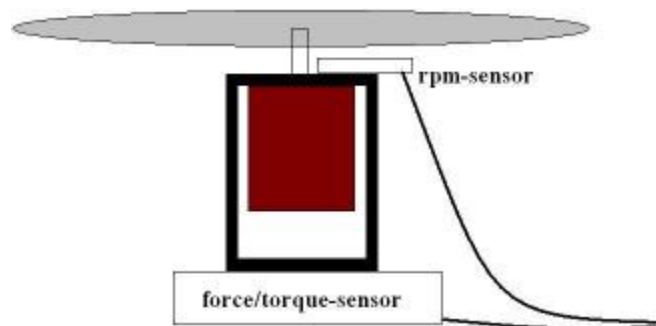
La configurazione si componeva dei seguenti elementi:



**Figura 3.1** – Set up sperimentale motore

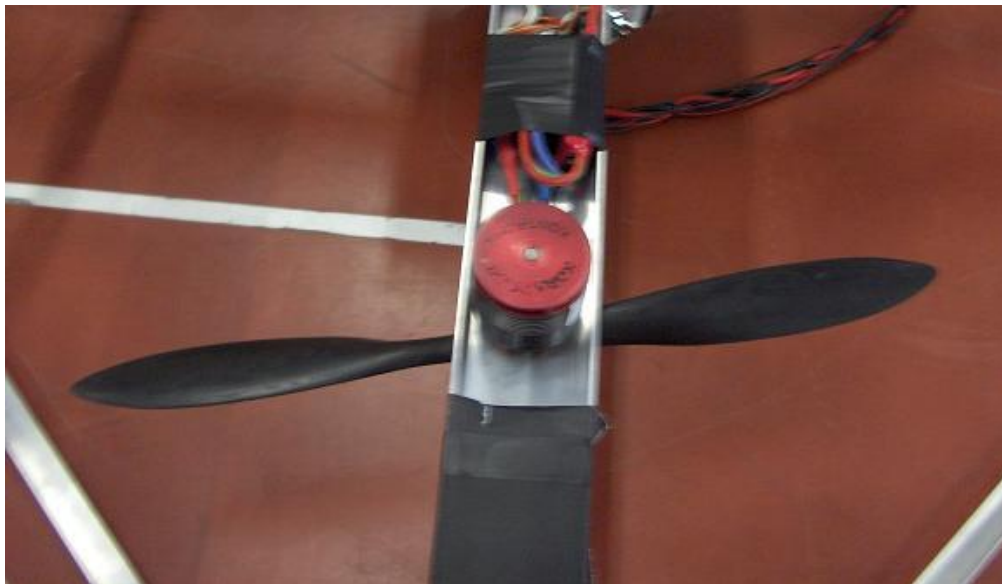
Tramite la piattaforma Real-Time si sono generati comandi da far eseguire al motore, andando parallelamente a registrare il comportamento (la risposta) fornita da quest'ultimo attraverso sensori di forza, momento e di velocità.

Di seguito uno schema del motore e dei sensori.



**Figura 3.2** – Schematizzazione motore e sensori

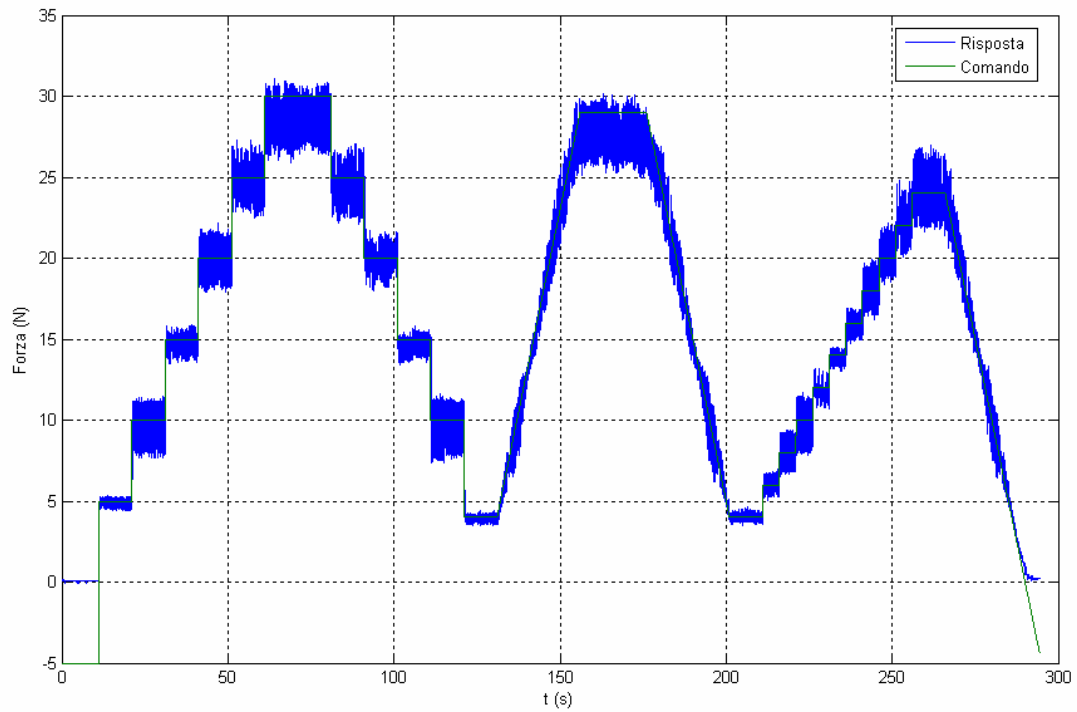
Come si può notare il motore era fissato ad una cella di carico, la quale poggiava saldamente su di un piano : il sensore di velocità era fissato nella parte superiore del motore.



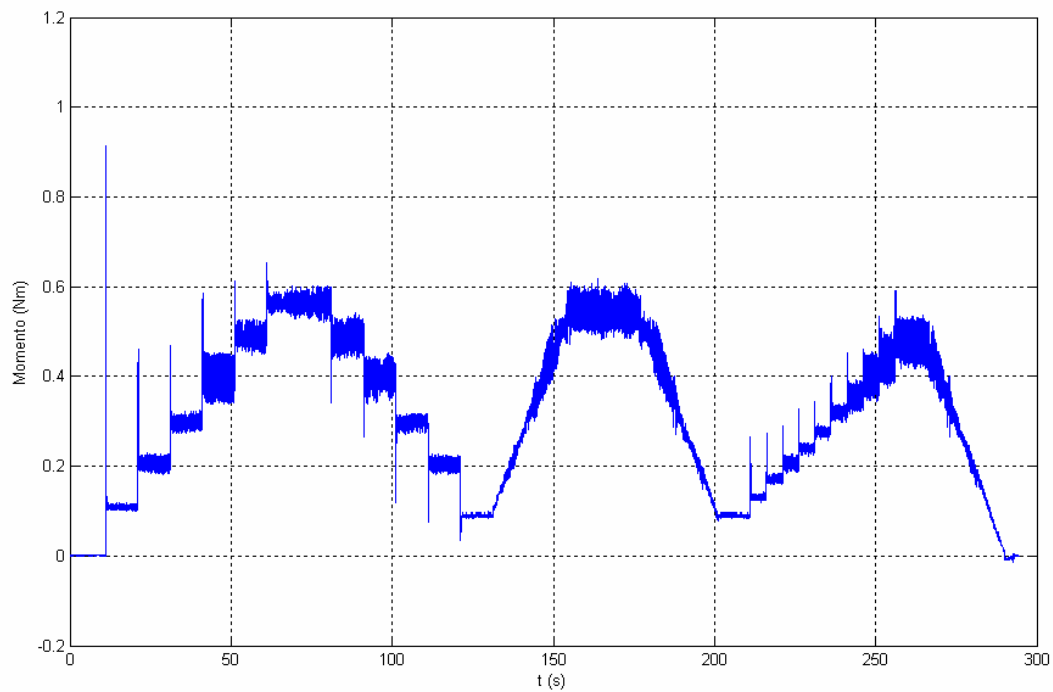
**Figura 3.3** – Motore

## 3.2 Risultati

Si analizzano in prima istanza le risposte fornite dalla cella di carico:



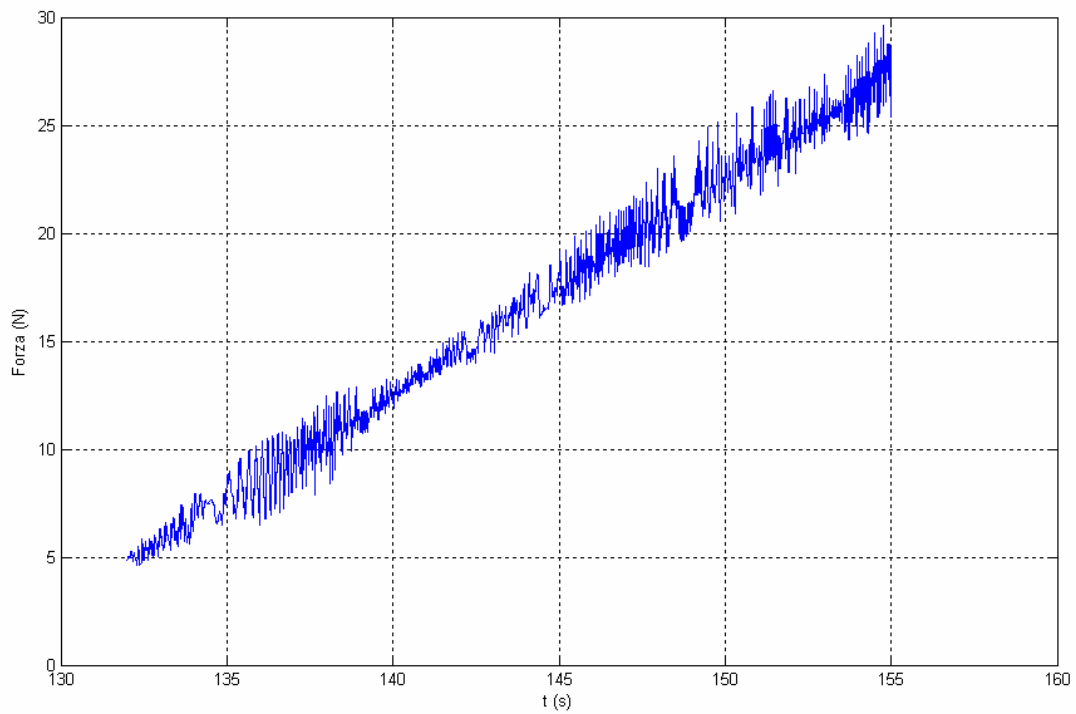
*Figura 3.4 – Andamento forza*



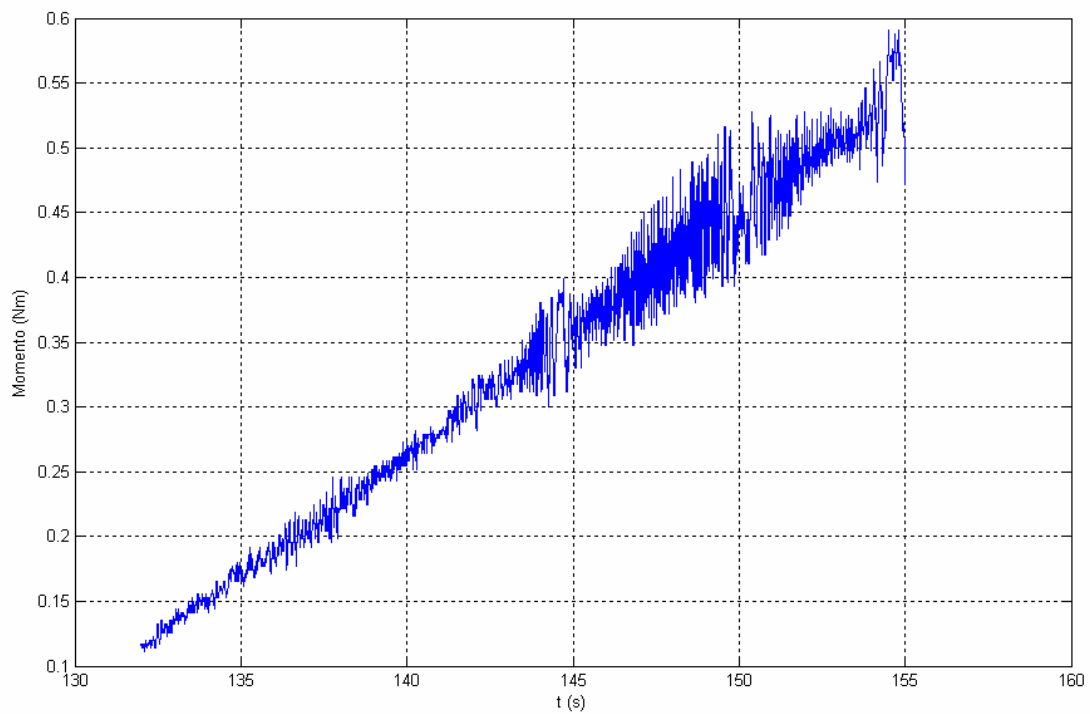
*Figura 3.5 – Andamento Momento*



Estrapolando dai grafici precedenti la parte relativa alla risposta al comando rampa si ottiene:

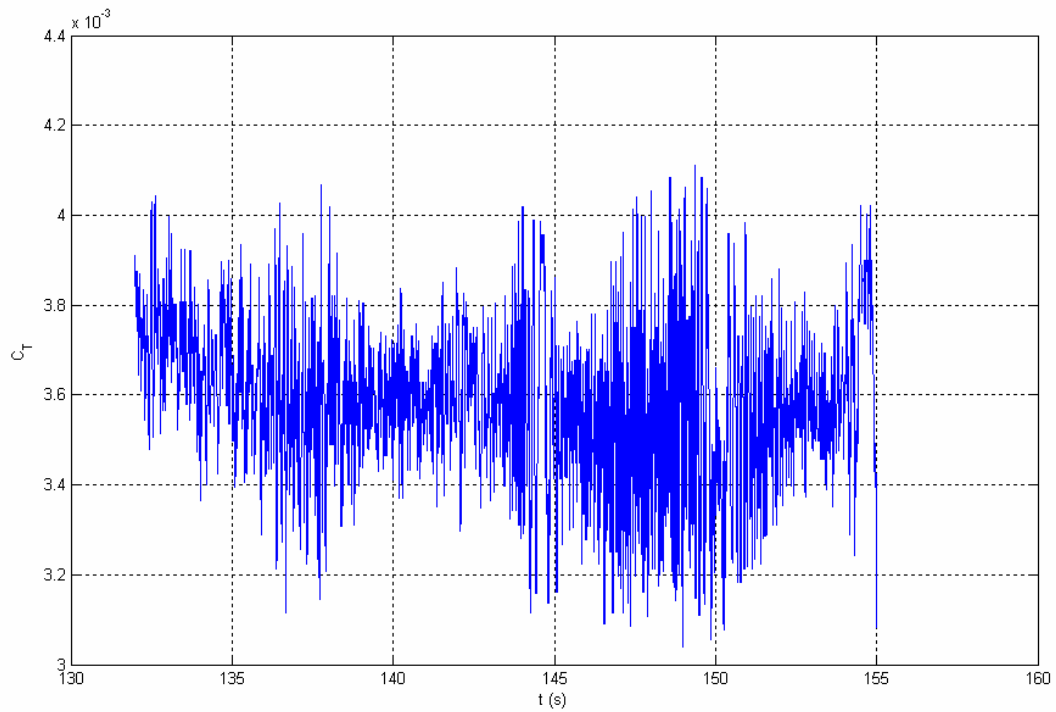


*Figura 3.6 – Rampa Forza*

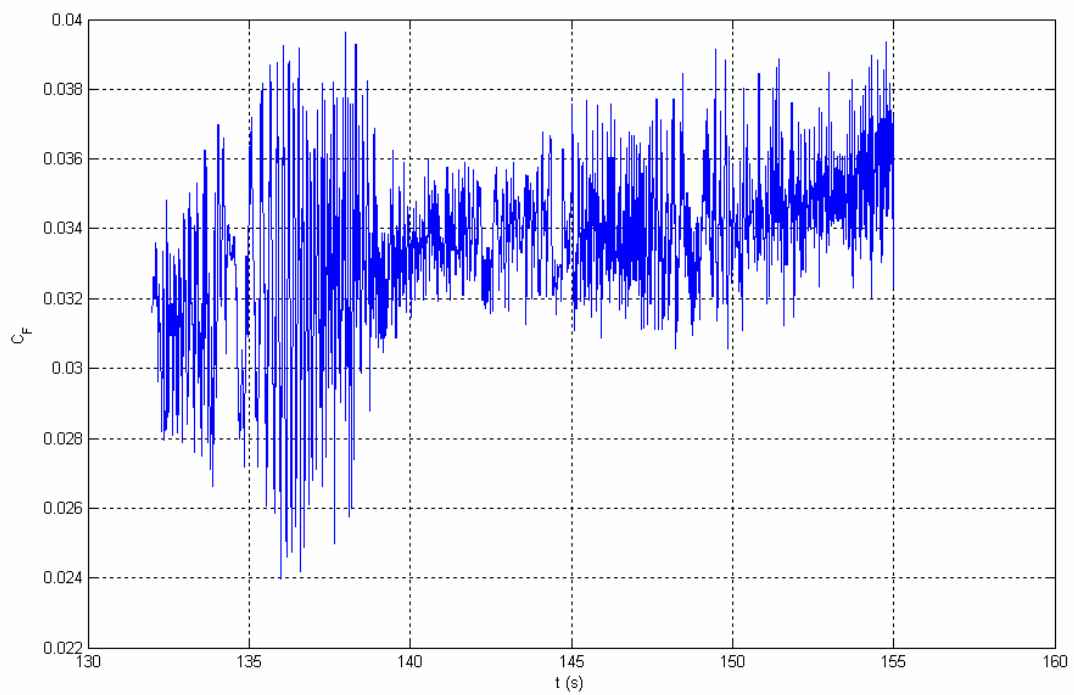


*Figura 3.7 – Rampa Momento*

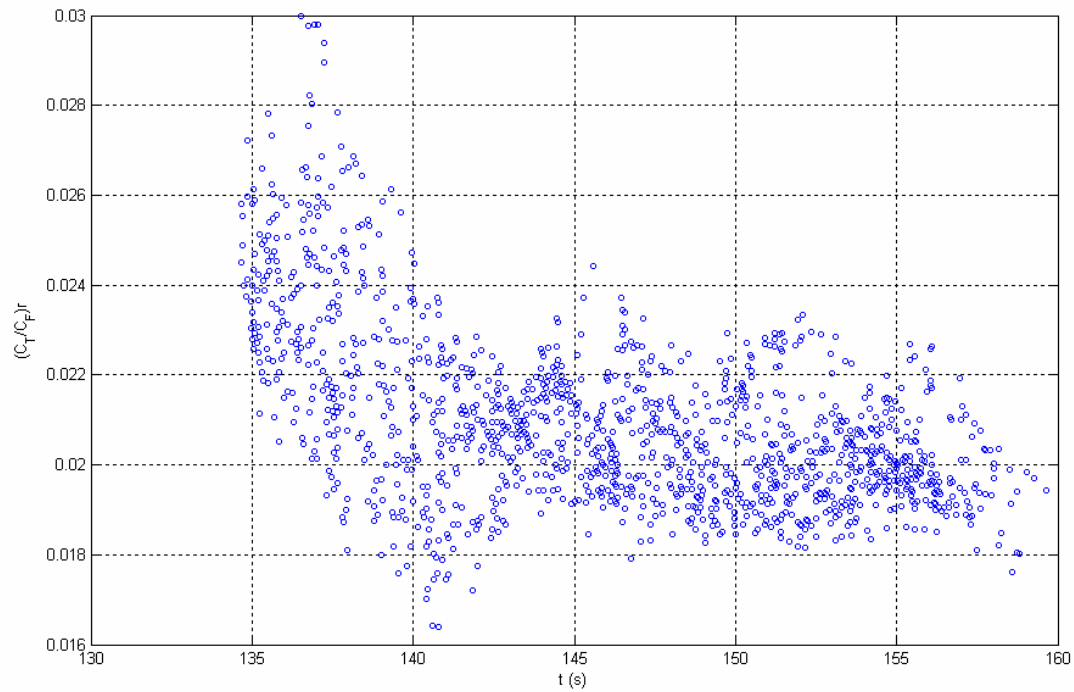
Ricordando le formule per il calcolo dei coefficienti legati a forza e momento (2.13), si è quindi potuto valutare il valore di  $C_T$ ,  $C_F$  e  $V$ .



**Figura 3.8 –  $C_T$**



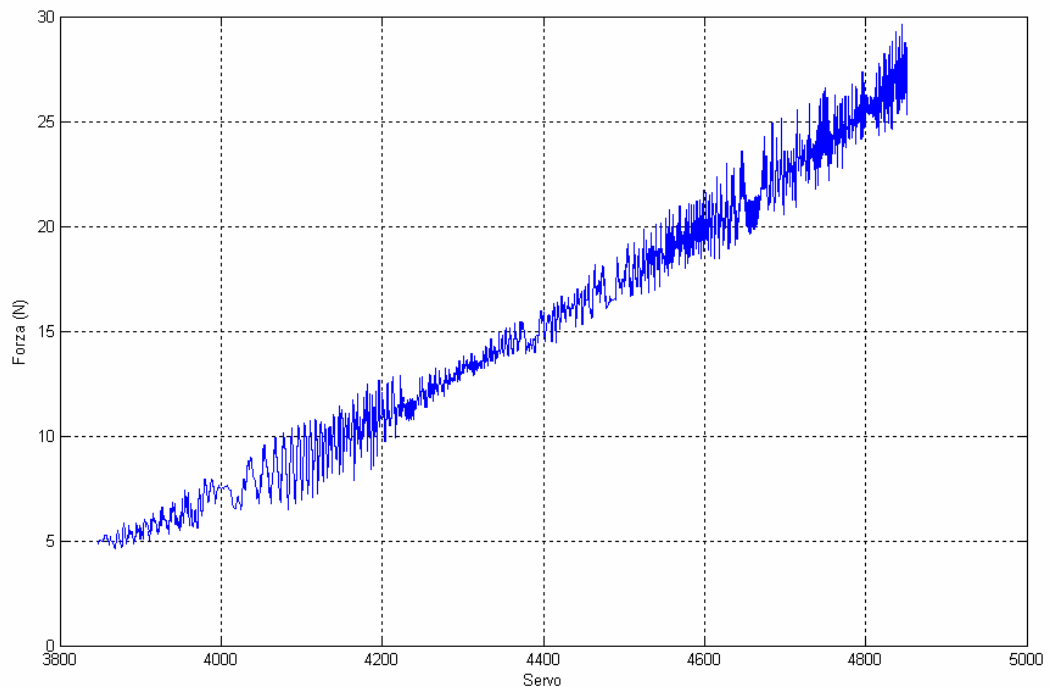
**Figura 3.9 –  $C_F$**



**Figura 3.10** –  $\zeta$

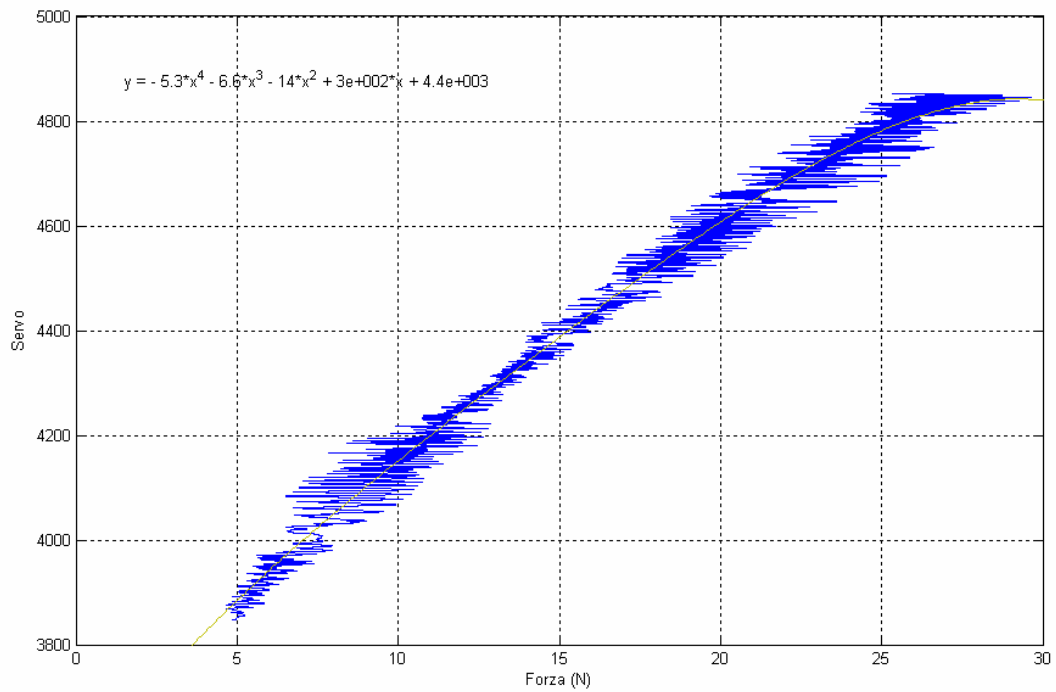
Si è scelto un valore di  $V$  pari a 0.02.

In secondo istanza si è analizzato il rapporto fra la forza generata e il comando servo applicato:



**Figura 3.11** – Andamento Servo-Forza

Una scelta implementativa differente dalle 2.14 e 2.15 valuta il comando servo tramite un' interpolazione dei dati dell'andamento Forza-Servo.

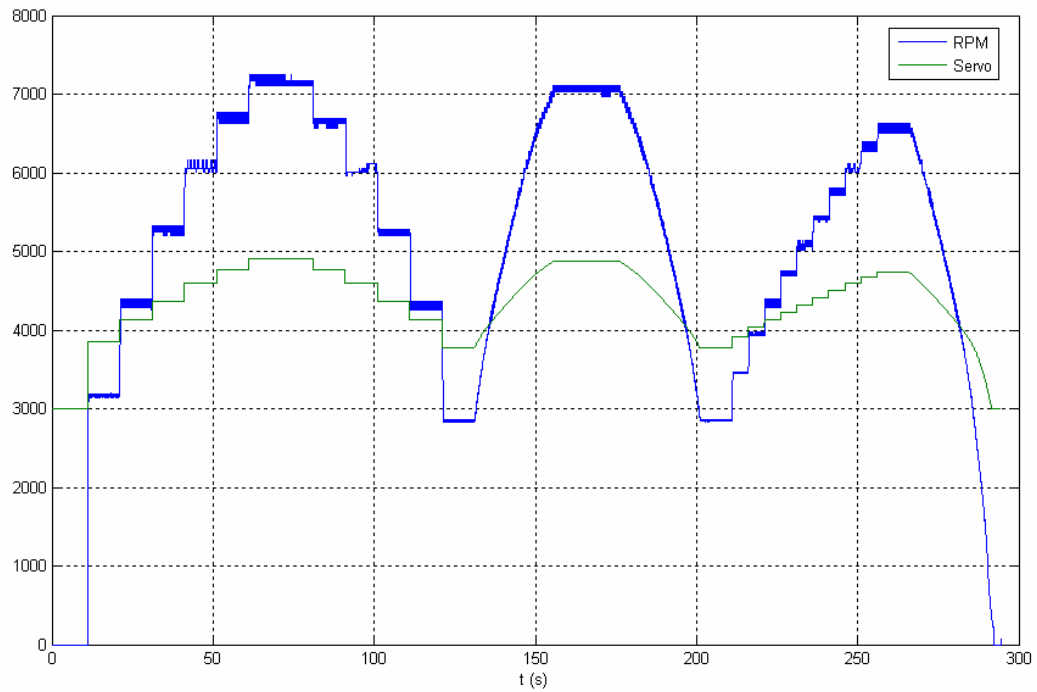


*Figura 3.12 – Andamento Forza-Servo*

### 3.3 Delay

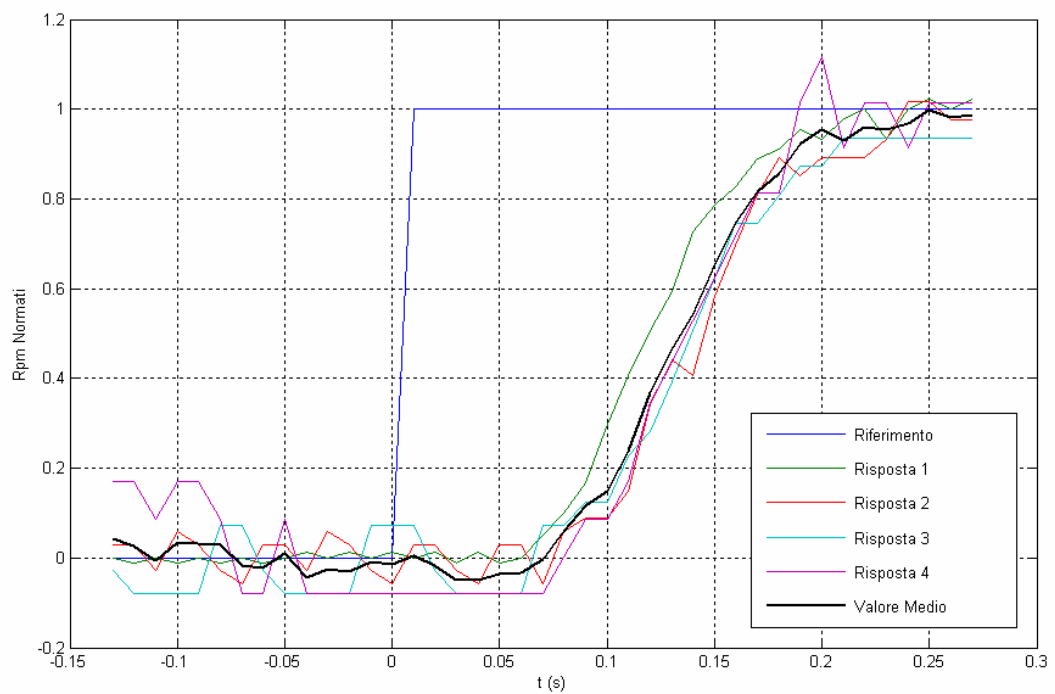
Dai risultati raccolti tramite il sensore di velocità si è potuto constatare la presenza importante di un ritardo, fra la generazione del segnale servo e la sua attuazione reale, dovuta al fatto che la rotazione delle pale non è, ovviamente, istantanea.

Si è deciso quindi di inserire nel nostro modello anche una parte descrivente questa situazione.



**Figura 3.13 – Risposta Servo-Rpm**

Si è analizzato l'andamento delle risposte al comando servo misurate tramite il sensore di velocità. Opportunamente shiftati e normati, si è potuto confrontare i diversi comportamenti del motore ottenendo la seguente situazione:



**Figura 3.14 – Risposta gradino**

Si è sottoposto il motore a diversi comandi di tipo gradino, come risulta dalla figura 3.13, prima e dopo la generazione del segnale di tipo rampa.

Si può notare che le risposte del motore, opportunamente normate e riportate tutte nell'intorno di un tempo zero, salgono con un segnale che raggiunge un valore pari al 63% intorno a 0.150 s.

Si è scelto di prendere come modello di errore l'approssimazione di Padè.

Essa si basa nell'eguagliare lo sviluppo in serie della funzione  $e^{-Ts}$  con lo sviluppo in serie di una funzione razionale con a numeratore un polinomio di ordine  $P$  e a denominatore un polinomio di ordine  $Q$ .

Il risultato viene chiamato approssimante  $(P, Q)$  di Padè o approssimazione di ordine  $n$  se  $P = Q = n$ .

Considerando l'approssimante di ordine 1, si vuole determinare  $a_0, b_0, b_1$  tali che:

$$e^{-s} - \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + 1} = e \quad (3.1)$$

Andando ad espandere le due funzioni secondo lo sviluppo in serie di McLaurin otteniamo

$$e^{-s} = 1 - s + \frac{s^2}{2!} - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} - \dots \quad (3.2)$$

$$\frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + 1} = b_1 + (b_0 - a_0 b_1)s - a_0(b_0 - a_0 b_1)s^2 + a_0^2(b_0 - a_0 b_1)s^3 - \dots$$

Da cui eguagliando i primi tre termini si ottiene:

$$e^{-s} \cong -\frac{1 - s/2}{1 + s/2} \quad (3.3)$$

In altri termini le approssimazioni di ordine  $n$  godono della proprietà che i coefficienti della loro espansione in serie di McLaurin coincidono con i coefficienti dell'espansione di  $e^{-Ts}$  fino al termine di ordine  $(2n)$ .

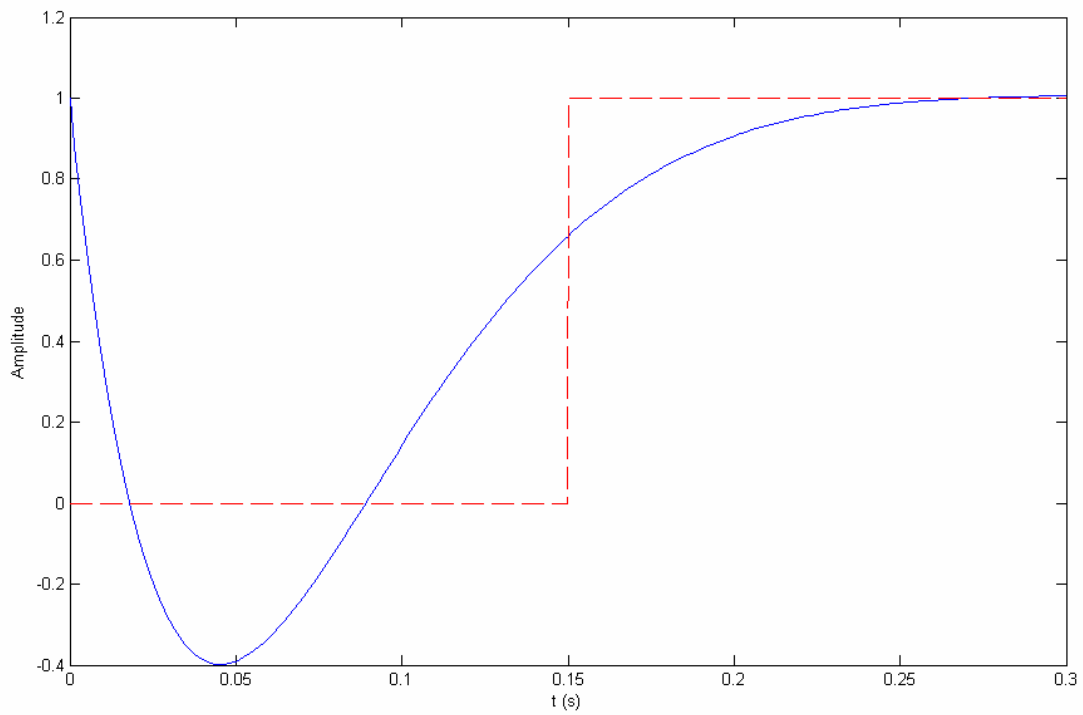
In generale valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} e^{-Ts} &\cong -\frac{1 - Ts/2}{1 + Ts/2} \\ e^{-Ts} &\cong -\frac{1 - Ts/2 + (Ts)^2/12}{1 + Ts/2 + (Ts)^2/12} \\ e^{-Ts} &\cong -\frac{1 - Ts/2 + (Ts)^2/12 - (Ts)^3/120}{1 + Ts/2 + (Ts)^2/12 + (Ts)^3/120} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Abbiamo ritenuto sufficiente utilizzare un approssimazione di ordine 2 per tutti e quattro gli ingressi del nostro sistema.

Lo stato risulta quindi nuovamente aumentato del seguente delay system:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -40 & -66.67 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.5)$$



**Figura 3.15 – Padè**

## 4.1 Motivazioni

Il sistema di sensoristica del Quad dispone, come visto precedentemente, di un sistema di visione per la misurazione della posizione  $(q_1, q_2, q_3)$  e degli angoli  $(q_4, q_5, q_6)$ .

Per quanto riguarda le velocità esse sono misurate direttamente come derivata della posizione  $(u_1, u_2, u_3)$  o tramite dei giroscopi per quanto riguarda quelle angolari  $(u_4, u_5, u_6)$ .

Il sistema di visione però, risulta valido, ovviamente, solo all'interno del laboratorio, ma dovrà essere opportunamente sostituito in un'ottica di volo in ambiente esterno.

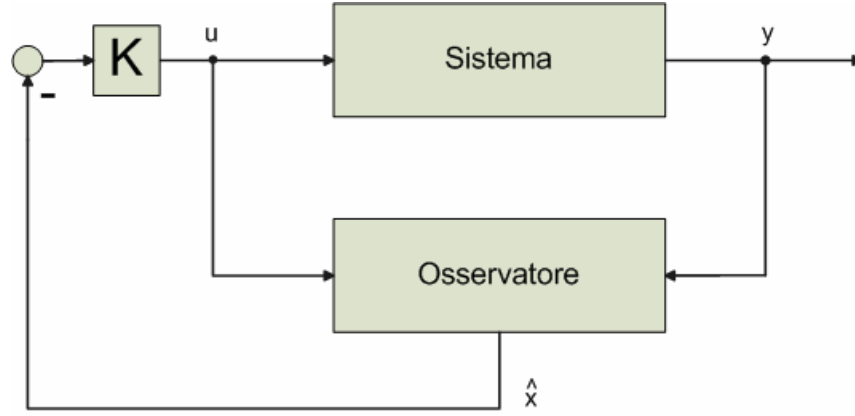
Il *GPS* è lo standard per quanto concerne la valutazione della posizione, mentre per gli angoli si è deciso di misurare, tramite l'utilizzo di una bussola, l'angolo intorno all'asse  $Z$   $(q_6)$ .

Il filtro di Kalman, [18], è l'osservatore ottimo dello stato.

Per questo motivo si è scelto di svilupparne uno per quanto riguarda gli angoli di orientazione intorno agli assi  $X$  ed  $Y$  rispettivamente  $(q_4, q_5)$ .

L'integrazione fra *GPS* e piattaforma inerziale richiederà ovviamente futuri sviluppi per il filtro da noi realizzato (es. un filtro di Kalman esteso) ma i risultati che si sono ottenuti rappresentano sicuramente un ottimo punto di partenza per lavorare in questa direzione.





**Figura 4.1** – Struttura generale osservatore

## 4.2 Teoria

Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + v(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Dove  $w, v$  vettori di processi *congiuntamente gaussiani* bianchi, a media nulla, mutuamente indipendenti e indipendenti dallo stato iniziale, con matrici di covarianza:

$$\begin{aligned} E[ww^T] &= \Theta d(t-t) \\ E[vv^T] &= \Psi d(t-t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'osservatore/stimatore dello stato è definito come

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y_m - C\hat{x}) \quad (4.3)$$

Definendo l'errore di stima come  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  si considera come criterio di ottimalità la minimizzazione del valore atteso dell'errore quadratico di stima (errore quadratico medio)  $E[e^T e]$ .

Se  $R$  è definita positiva, il problema di ottimo ammette soluzione unica (Kalman):

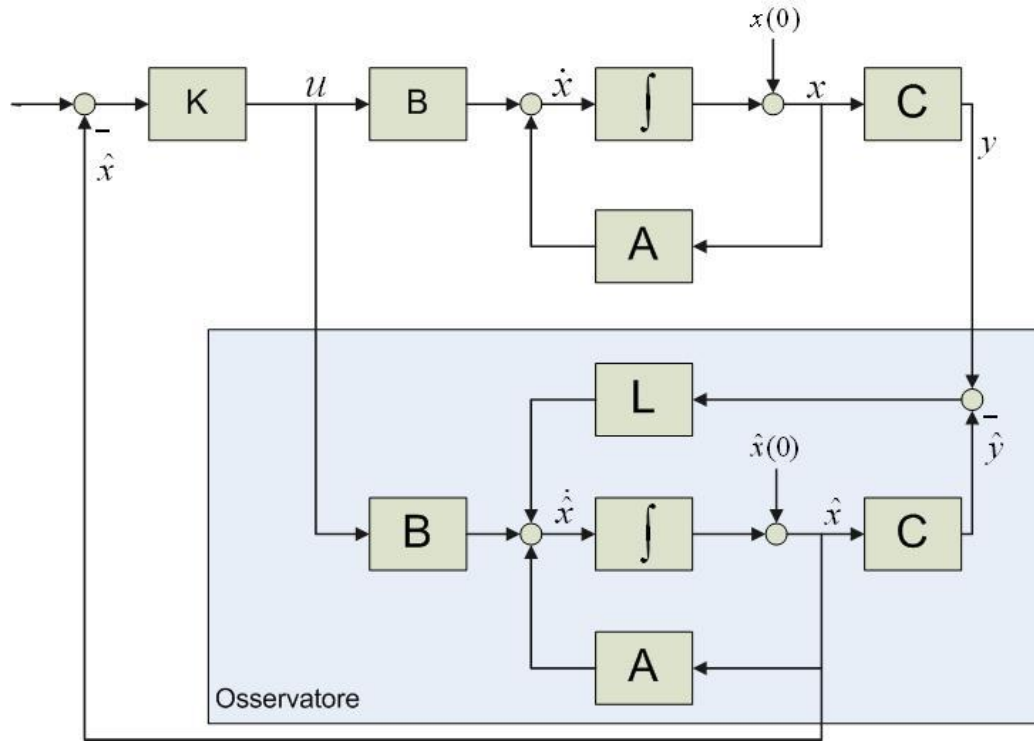
$$L(t) = P(t)C^T(t)\Psi^{-1}(t) \quad (4.4)$$

con  $P(t)$  soluzione dell'equazione di Riccati:

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)C^T(t)\Psi^{-1}(t)C(t)P(t) + \Theta(t) \quad (4.5)$$

con  $P(t_0) = P_0 \quad E[x_0 x_0^T] = P_0 d(t-t)$

Il filtro di Kalman è un osservatore in cui il guadagno che pesa l'innovazione è direttamente proporzionale alla varianza della stima corrente dello stato, e inversamente proporzionale alla varianza del rumore sulle uscite.



**Figura 4.2** – Struttura Filtro di Kalman

### 4.3 Matrici di Covarianza

Per costruire le matrici di covarianza si è partiti dai dati registrati durante il volo reale.

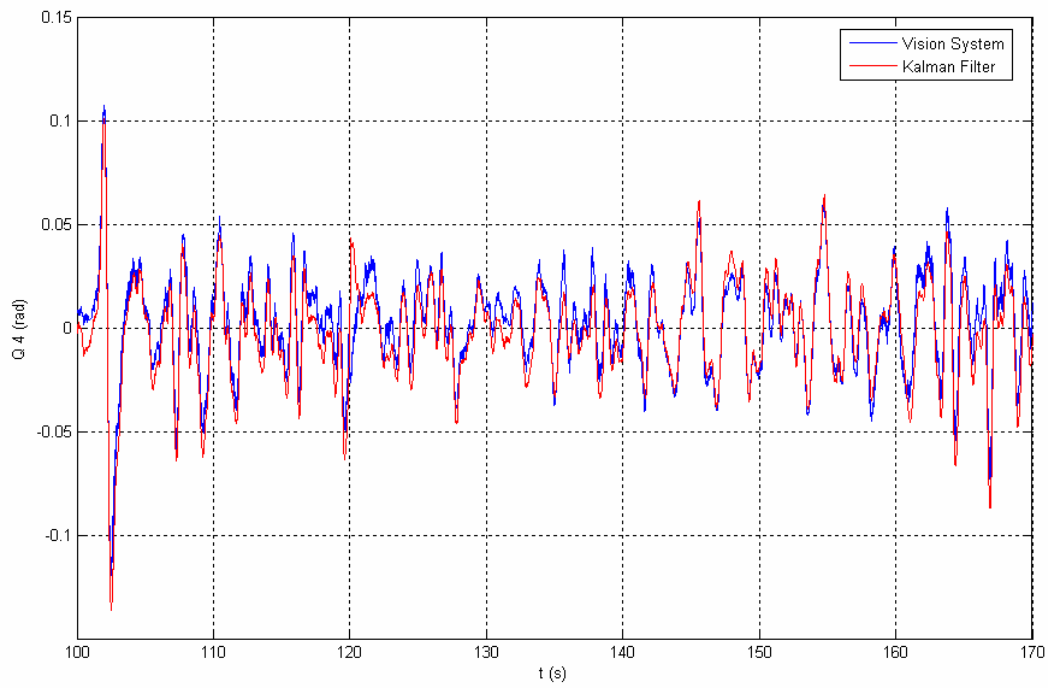
$$\Theta(i, j) = \begin{cases} 0.0001 & i = j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 0.25 & i = j = 9, 10, 11, 12 \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\Psi(i, j) = \begin{cases} 0.001 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

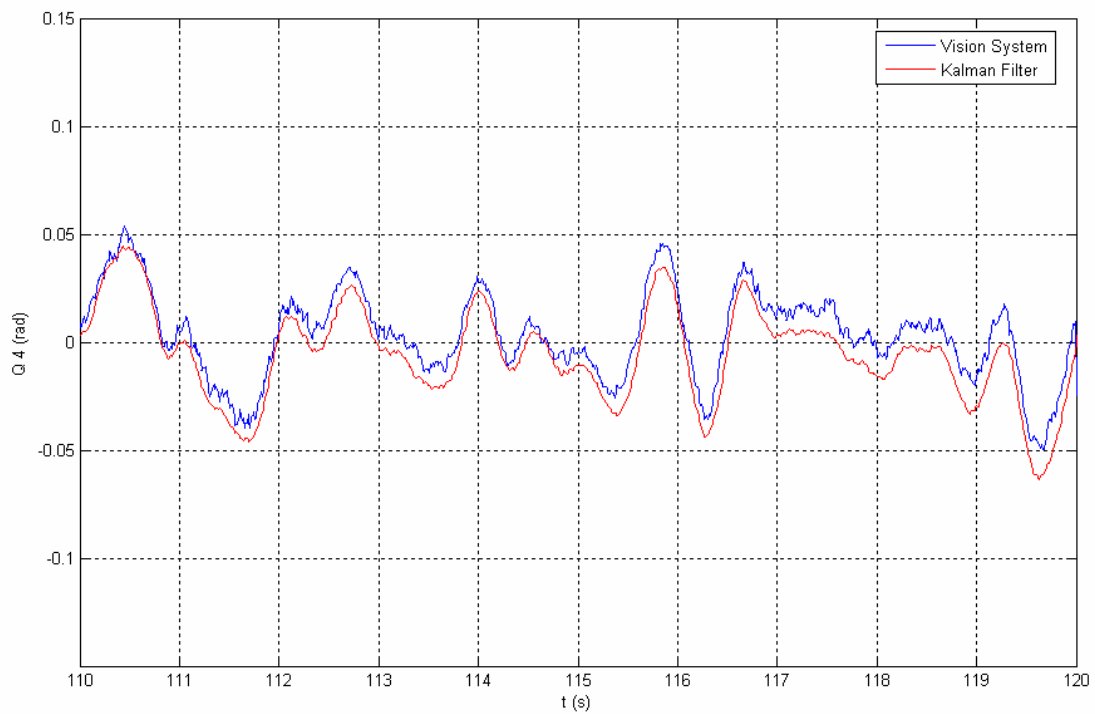
$\Psi$  risulterà 10 x 10 dato che  $q_4$  e  $q_5$  sono le variabili da stimare.

## 4.4 Risultati

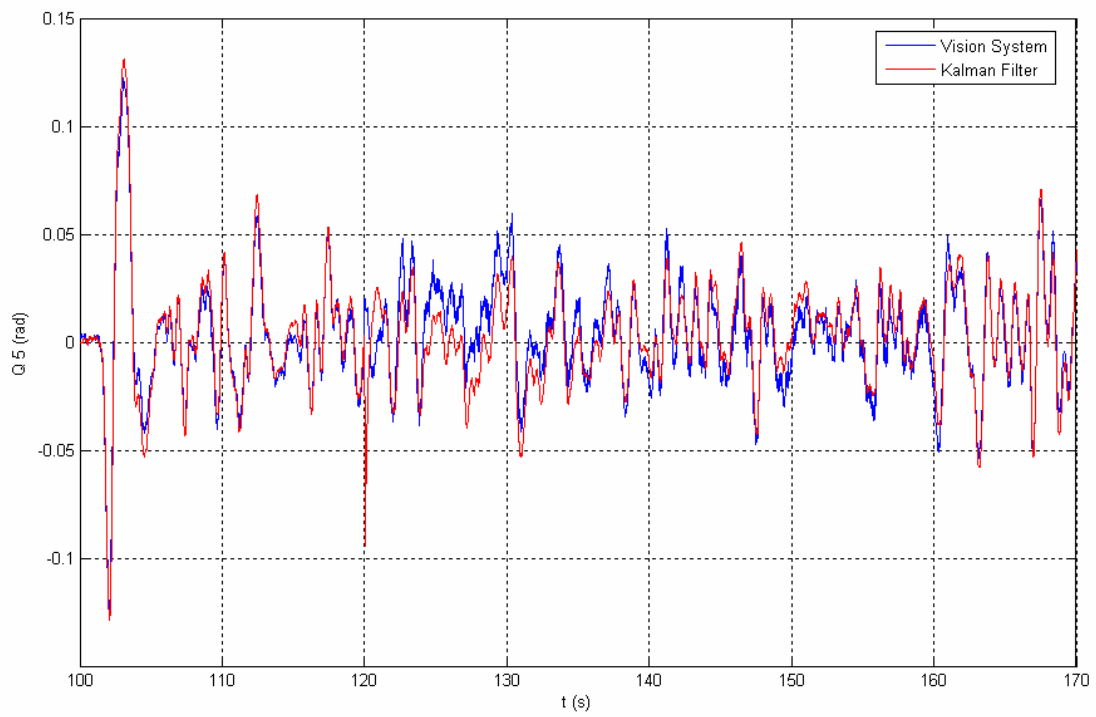
Di seguito si riportano i risultati ottenuti confrontando l'output del filtro di Kalman con l'output del sistema di visione:



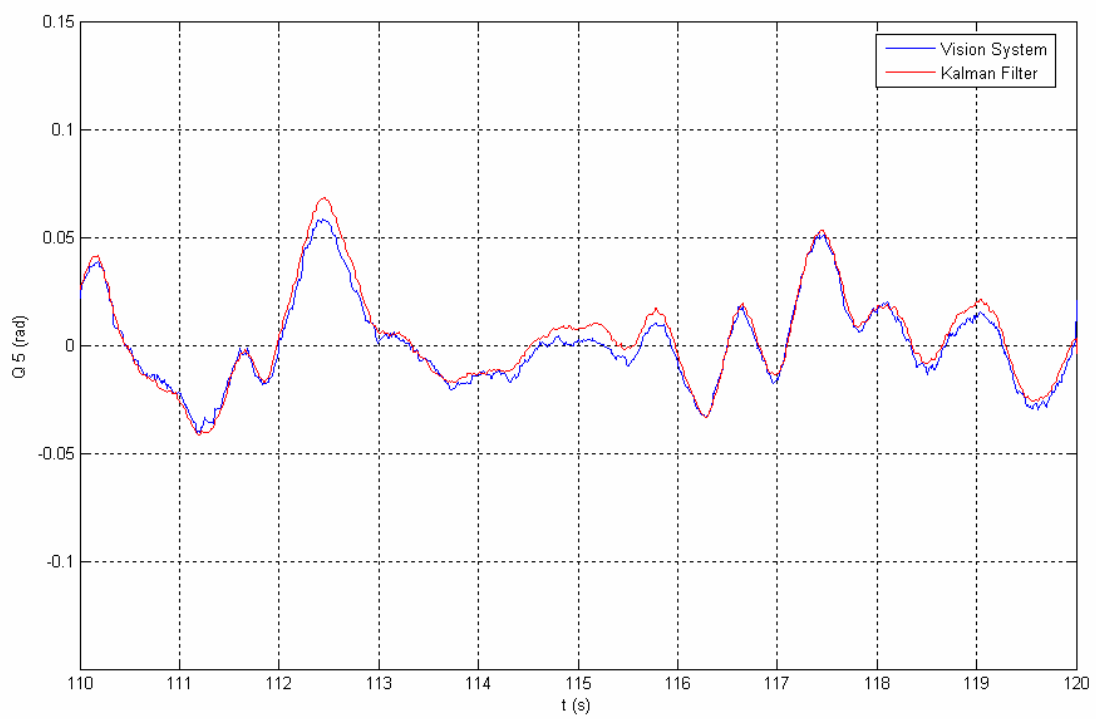
*Figura 4.3 – Stima di  $q_4$*



*Figura 4.4 – Stima di  $q_4$  (Particolare)*



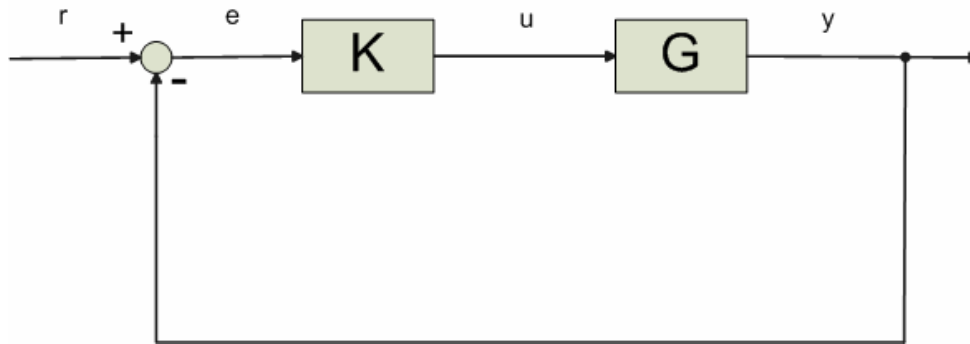
**Figura 4.5 – Stima di  $q_5$**



**Figura 4.6 – Stima di  $q_5$  (Particolare)**

### 5.1 Framework generica

Come prima Overview ecco la classica impostazione ad anello retroazionato:



**Figura 5.1** – Framework K-G

Nel sistema Quadrotor si è scelto di utilizzare come ingressi desiderati (riferimenti – r) le tre coordinate di posizione ( $q_1, q_2, q_3$ ) e l'angolo di heading ( $q_6$ ).

Per le restanti variabili è richiesto un valore nullo (problema di hovering).

$$e_i = q_i^{DES} - q_i^{REAL} = -q_i^{REAL}, i \neq 1,2,3,6 \quad (5.1)$$

Per risolvere il problema dovuto alla forza peso, si è aggiunta una nuova componente costante (cfr. figura 5.2) che si va a sommare alla forza  $F_3$  in uscita dal controllore.

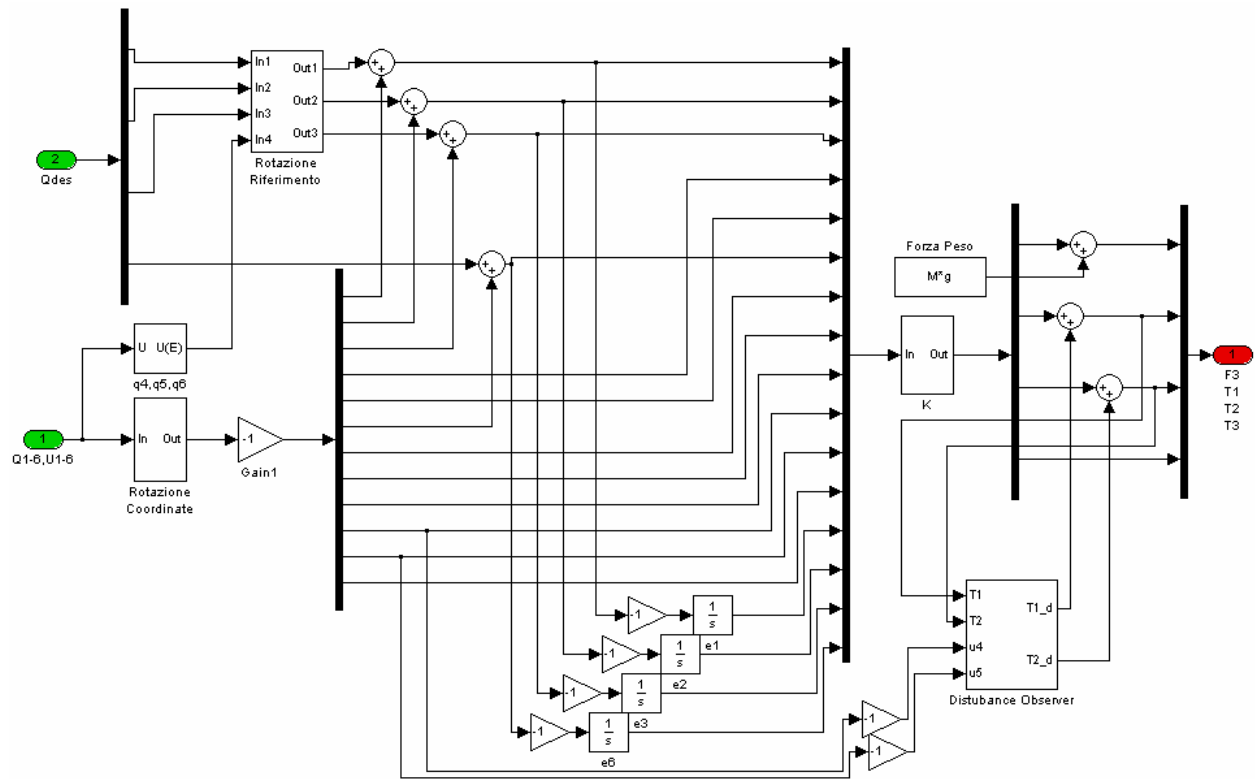
Per completare infine questa prima parte di studio e sviluppo del controllore, si è inserito un integratore per ciascuna delle variabili di riferimento, per ottenere errori a regime nulli e compensare eventuali piccole differenze di misura (es. peso o lievi asimmetrie).

$$\begin{aligned}
e(t) &= q_{DES} - q_{REAL} \\
\dot{p}(t) &= e(t) \\
\dot{p} &= [e_1, e_2, e_3, e_6]^T \\
\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bu(t) \\ q_{DES} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

## 5.2 Matrici di Rotazione

Per permettere al controllore di effettuare rotazioni intorno all'asse  $Z$  (variazioni di  $q_6$ ) si è reso necessario l'introduzione delle matrici di rotazione per poter far riferimento sempre al medesimo sistema di coordinate.

$$\begin{aligned}
T(q_4) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(q_4) & -s(q_4) \\ 0 & s(q_4) & c(q_4) \end{bmatrix} \\
T(q_5) &= \begin{bmatrix} c(q_5) & 0 & s(q_5) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(q_5) & 0 & c(q_5) \end{bmatrix} \\
T(q_6) &= \begin{bmatrix} c(q_6) & -s(q_6) & 0 \\ s(q_6) & c(q_6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T(q_4, q_5, q_6) &= \begin{bmatrix} c(q_5)c(q_6) & -c(q_5)s(q_6) & s(q_5) \\ c(q_4)s(q_6) + s(q_4)s(q_5)c(q_6) & c(q_4)c(q_6) - s(q_4)s(q_5)s(q_6) & -s(q_4)c(q_5) \\ s(q_4)s(q_6) - c(q_4)s(q_5)c(q_6) & s(q_4)c(q_6) + c(q_4)s(q_5)s(q_6) & c(q_4)c(q_5) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.3}$$



**Figura 5.2 – Framework Controllore**

Si possono notare nella figura sopra riportata tutti gli elementi appena descritti che rappresentano la base per entrambi i controllori effettuati.

La differenza risiede ovviamente nella composizione del blocco ***K*** (*controllore*).

Per quanto concerne il blocco ***disturbance observer*** si rimanda al Capitolo 6.

### 5.3 Introduzione ai metodi Loop Shaping

Un tipico approccio per la progettazione di controllori per sistemi MIMO (multi input – multi output) sono i cosiddetti metodi Loop Shaping [2].

Questa tipologia di controllo si basa sulla specificazione dei requisiti *closed-loop* in termini dei valori singolari *open-loop*, in particolare andando a realizzare guadagno alto a basse frequenze ed un guadagno basso ad alte frequenze.

CONDITIONS	LOOP GAIN	APPROXIMATION	FREQUENCY	OBJECTIVES
$\underline{s}(GK) \gg 1$	High	$\overline{s}((I - GK)^{-1}) \cong \frac{1}{\underline{s}(GK)}$ $\overline{s}((I - GK)^{-1}G) \cong \frac{1}{\underline{s}(K)}$	Low	Performance
$\overline{s}(GK) \ll 1$	Low	$\overline{s}(K(I - GK)^{-1}) \cong \overline{s}(K)$ $\overline{s}(GK(I - GK)^{-1}) \cong \overline{s}(GK)$	High	Robust Stability

**Tabella 5.1** – Relazione Valori singolari-Obiettivo

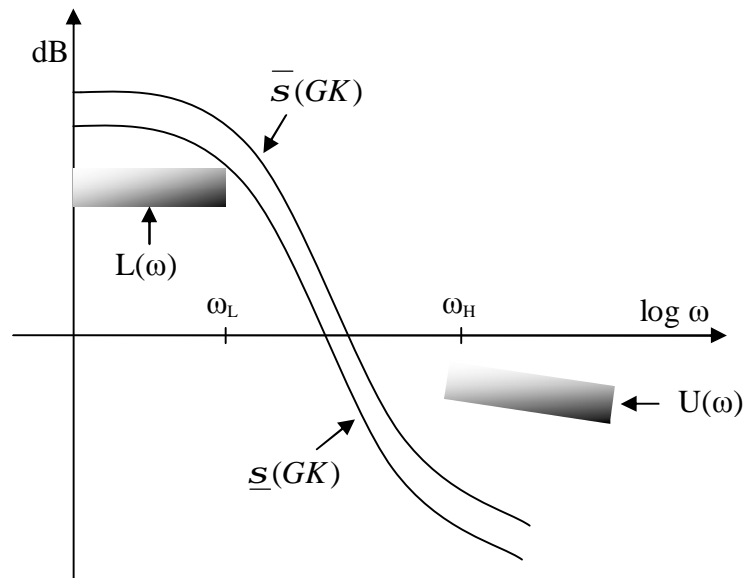
Dalla tabella precedente risulta evidente come si possa manipolare il sistema in *closed-loop* semplicemente andando a modificare i valori singolari del sistema *open-loop* ponendo oltremodo attenzione anche ai valori singolari del nostro controllore.



FUNCTION	INTERPRETATION
$\bar{S}((I - GK)^{-1})$	Guadagno OUTPUT Disturbance à Controller INPUT Guadagno REFERENCE Signal à Tracking ERROR
$\bar{S}((I - KG)^{-1})$	Guadagno INPUT Disturbance à Plant INPUT
$\bar{S}(K(I - GK)^{-1})$	Guadagno OUTPUT Disturbance à Controller OUTPUT Maximum Additive Plant Perturbation
$\bar{S}((I - GK)^{-1}G)$	Guadagno INPUT Disturbance à Plant OUTPUT Maximum Additive Controller Perturbation
$\bar{S}(GK(I - GK)^{-1})$	Guadagno Controller INPUT Disturbance à Plant OUTPUT Maximum Multiplicative OUTPUT Plant Perturbation
$\bar{S}(K(I - GK)^{-1}G)$	Guadagno INPUT Disturbance à Controller OUTPUT Maximum Multiplicative INPUT Plant Perturbation

**Tabella 5.2 – Interpretazione Valori Singolari**

Un tipico andamento dei valori singolari desiderati si può vedere nella figura sottostante



**Figura 5.3 – Andamento Valori Singolari**

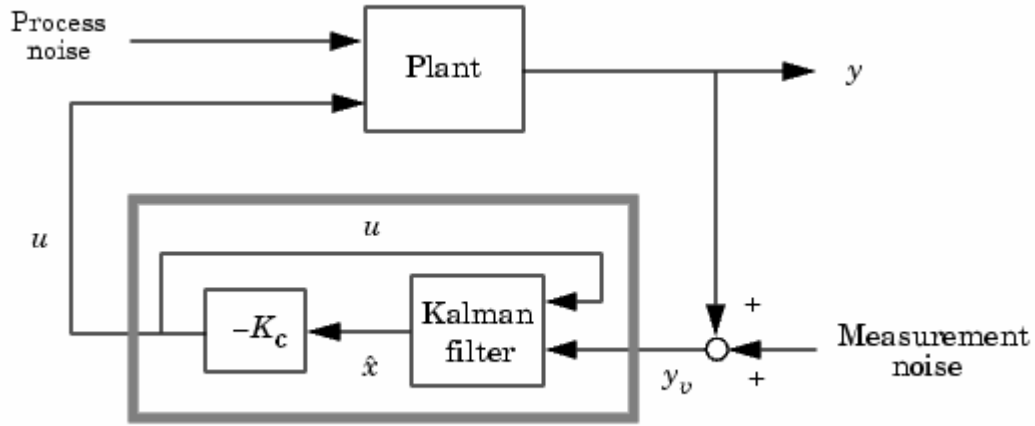
Due sono gli approcci tipici:

1. LTR : Loop Transfer Recovery.
2.  $H_\infty$  : Normalized Coprime Factors.

## 5.4 Loop Transfer Recovery (LTR)

La tecnica di controllo Loop Transfer Recovery ([6],[7]) ha come obiettivo quello di migliorare la robustezza dei controllori basati su osservatore. Si pensi come una modifica alla struttura della tecnica *LQG* per ottenere una robustezza paragonabile a quella *LQR*

Si consideri lo schema di un sistema *MIMO* controllato tramite *LQG*:



**Figura 5.4** – Struttura controllore *LQG*

Le seguenti relazioni rappresentano le dinamiche d'impianto:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx + v \end{cases} \quad (5.4)$$

dove  $w$  rappresenta il process noise e  $v$  il measurement noise.

Le seguenti relazioni rappresentano invece le dinamiche di controllo:

$$\begin{cases} u = -K_c \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = (A - BK_c - K_f C) \hat{x} - K_f e \end{cases} \quad (5.5)$$

$K_c$  rappresenta il guadagno derivato da una tecnica di controllo mentre  $K_f$  rappresenta il guadagno dell'osservatore (filtro di Kalman, cfr. equazioni 4.4).

Si è scelto di utilizzare, per il calcolo di  $K_c$ , i seguenti funzionali di costo (*LQR*):

$$J(u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} A^T S + SA - (SB + N)R^{-1}(B^T S + N^T) + Q &= 0 \\ K_c = K_{LQR} &= R^{-1}(B^T S + N^T) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Riprendendo le 5.4 e 5.5 e trasportando tutto nel dominio della frequenza:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (sI - A) \\ \begin{cases} G(s) = C\Phi(s)B \\ K(s) = K_c(sI - A + BK_c + K_f C)K_f \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

L'obiettivo del "Recovery" è quello di ottenere il solito livello di robustezza all'ingresso dell'impianto, ciò vuol dire:

$$B(C\Phi(s)B)^{-1} = K_f(I + C\Phi(s)K_f)^{-1} \quad (5.7)$$

Consideriamo  $K_f$  dipendente da un parametro  $q_0$  tale che:

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} \left[ \frac{K_f(q_0)}{q_0} \right] = BW \quad (5.8)$$

Con  $W$  arbitraria definita positiva.

Sostituendo nell'equazione di destra della 5.7 si ottiene:

$$K_f(I + C\Phi(s)K_f)^{-1} = \frac{K_f(q_0)}{q_0} \left( \frac{I}{q_0} + \frac{C\Phi(s)K_f(q_0)}{q_0} \right)^{-1} \quad (5.9)$$

Riscrivendo la 5.8 in funzione della nuova espressione ottenuta nella 5.9 si ottiene

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} \frac{K_f(q_0)}{q_0} \left( \frac{I}{q_0} + \frac{C\Phi(s)K_f(q_0)}{q_0} \right)^{-1} = BW(C\Phi(s)BW)^{-1} = BWW^{-1}(C\Phi(s)B) = B(C\Phi(s)B) \quad (5.10)$$

L'obiettivo diventa quindi trovare  $K_f(q_0)$ . Per far ciò si ricorre all'equazione di Riccati

$$\begin{aligned} A\Sigma + \Sigma A^T + \Theta_f - \Sigma C^T \Psi_f C \Sigma &= 0 \\ K_f(q_0) &= \Sigma(q_0)C^T \Psi_f^{-1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

dove si definiscono

$$\begin{cases} \Theta_f = \Theta + q_0 BB^T \\ \Psi_f = \Psi \end{cases} \quad (5.12)$$

con  $\Theta$  e  $\Psi$  matrici di covarianza del rumore.

## 5.5 Parametri LTR

La scelta delle matrici  $Q$  e  $R$  ( $N$  è stata scelta nulla) per il funzionale di costo 5.6 è stata effettuata sperimentalmente ottenendo i seguenti risultati:

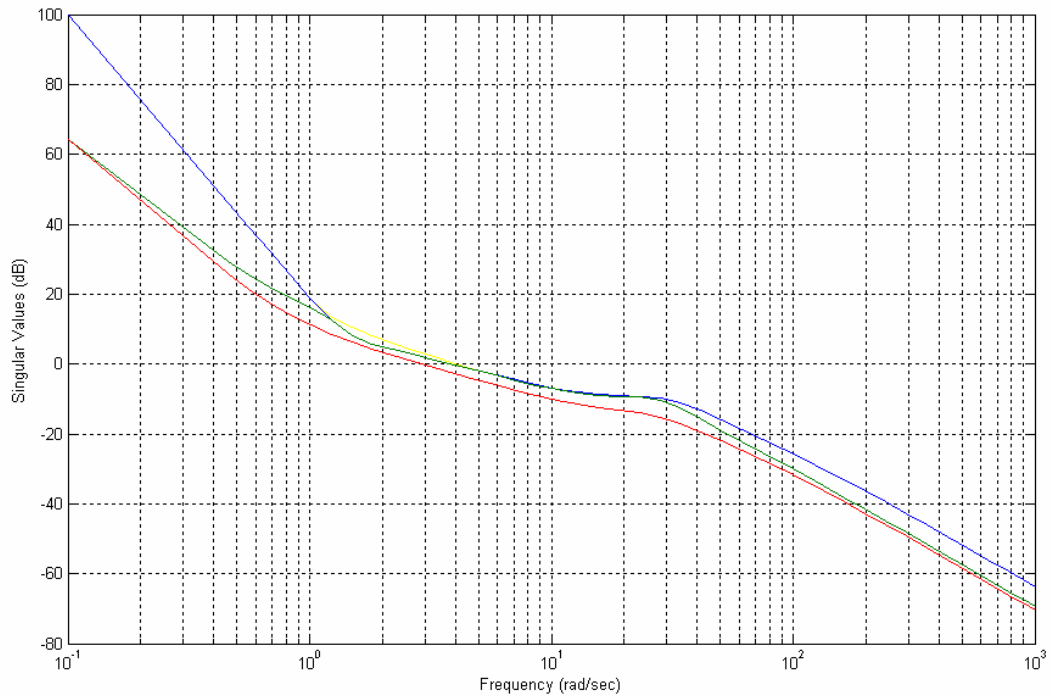
$$Q = \text{diag}\left(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, \int e_1, \int e_2, \int e_3, \int e_6\right)$$

$$Q = \text{diag}(100, 100, 1, 1, 1, 10, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 1, 0.2, 0.2, 1, 1) \quad (5.13)$$

$$R = \text{diag}(F_3, T_1, T_2, T_3) = (0.005, 40, 40, 0.3)$$

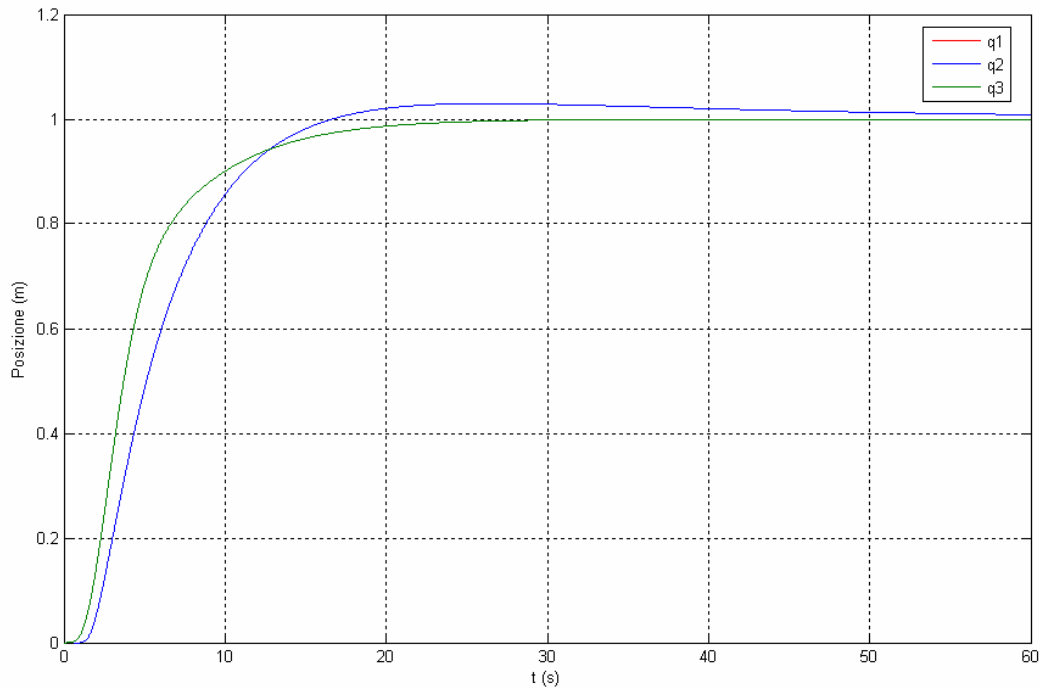
Per quanto riguarda le matrici  $\Theta$  e  $\Psi$  sono state scelte come per il filtro di Kalman (cfr. equazione 4.6).

Infine  $q_0$  è stato scelto pari a 100, ottenendo il seguente andamento dei valori singolari: si può notare come la forma sia proprio quella di figura 5.3.



**Figura 5.5** – Andamento valori singolari LTR

## 5.6 Risultati LTR (Simulazione)

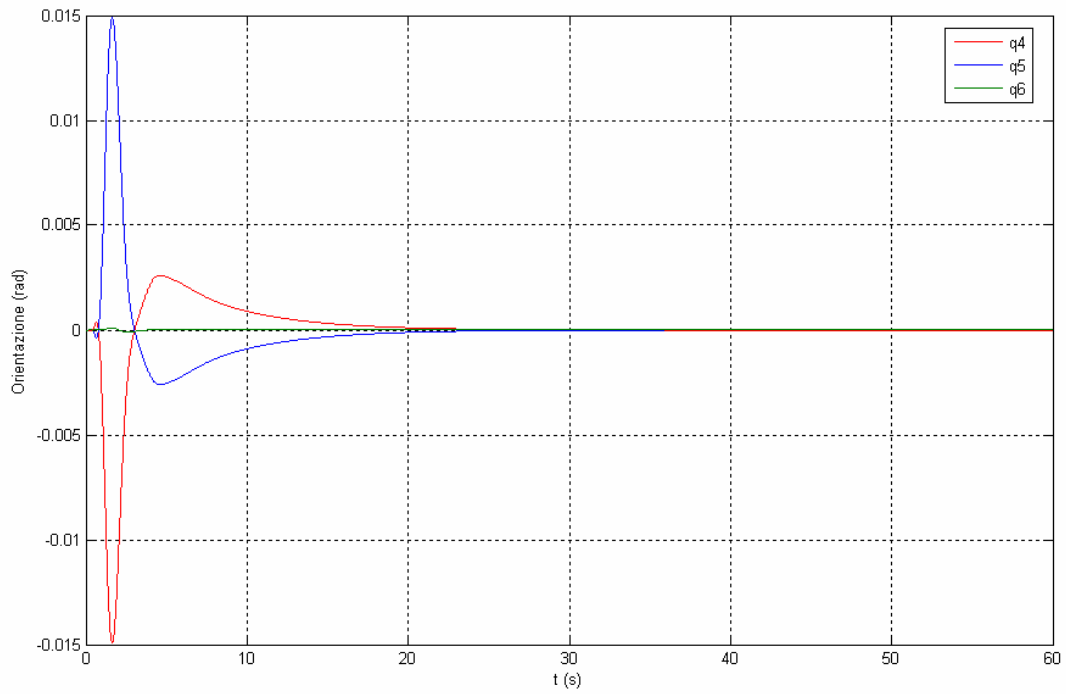


**Figura 5.6** –  $q_1, q_2, q_3$  LTR (Simulazione)

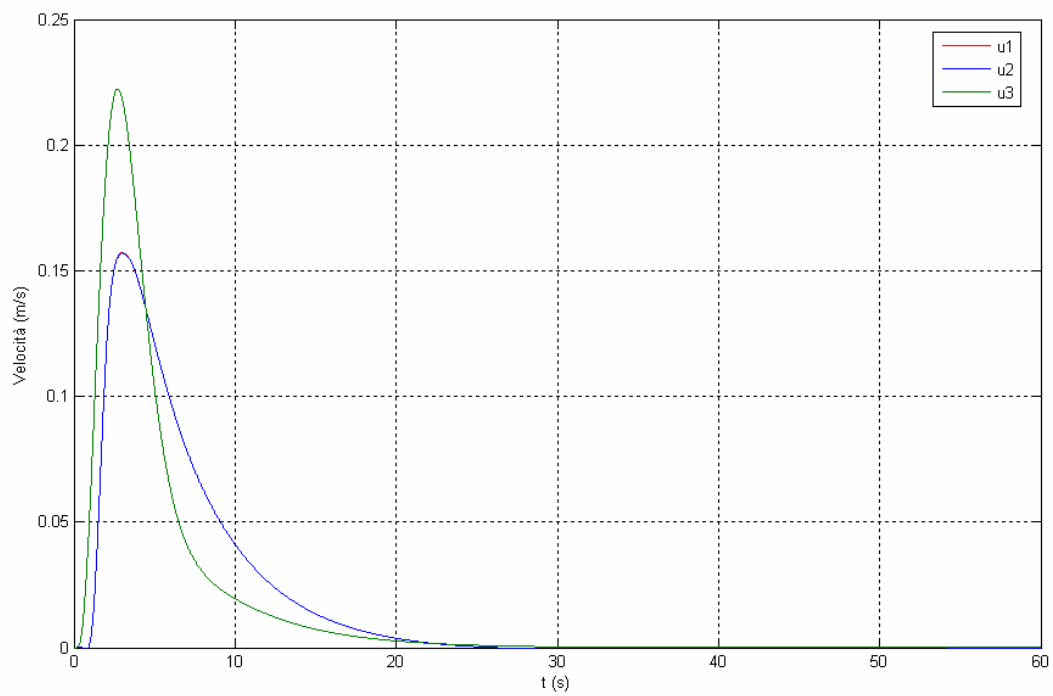
Dal grafico riportato sopra si può notare come la risposta presenti un Overshoot pari al 3% in seguito ad un ingresso unitario su tutte e tre le coordinate. Il sistema impiega poi un lasso di tempo molto elevato per tornare al livello di riferimento.

Per quanto riguarda le altre variabili (orientazione, velocità e velocità angolari) si può notare la presenza di un Overshoot iniziale dovuto essenzialmente ad una prima fase di assestamento in seguito al decollo.

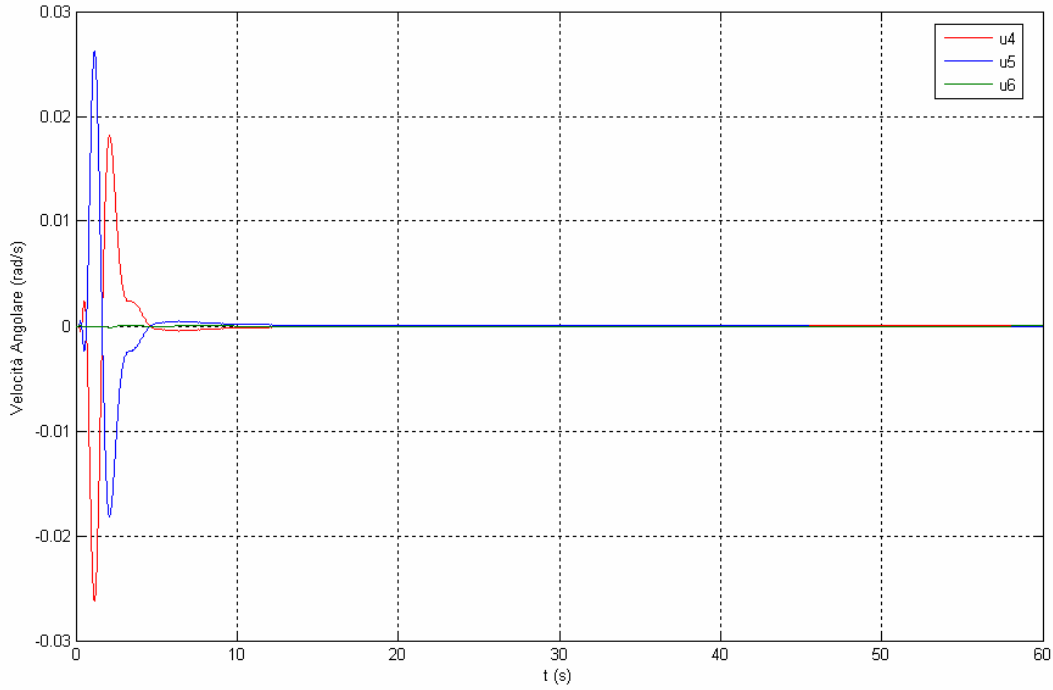
Questo comportamento risulta quindi molto legato alle richieste che vengono fatte in fase di distacco dal suolo.



**Figura 5.7** –  $q_4, q_5, q_6$  LTR (Simulazione)



**Figura 5.8** –  $u_1, u_2, u_3$  LTR (Simulazione)



**Figura 5.9** –  $u_4, u_5, u_6$  LTR (Simulazione)

## 5.7 Normalized Coprime Factor (NCF)

Andiamo adesso ad analizzare la tecnica introdotta da McFarlane e Glover [1] sottolineando come introduca vantaggi rispetto ad un approccio  $H$  infinito standard.

### 5.7.1 Definizioni

La norma  $L_\infty / H_\infty$  di  $G$  è data da

$$\|G\|_\infty \triangleq \sup_{w \in R} \overline{\sigma}[G(jw)] \quad (5.14)$$

$R$  denota lo spazio di tutte le matrici di *funzioni di trasferimento* (f.d.t.) reali e razionali.

$RL_\infty$  denota lo spazio di tutte le matrici f.d.t. reali e razionali che non hanno poli sull'asse immaginario con norma  $L_\infty$  finita.

$RH_\infty$  denota tutte le matrici f.d.t. in  $RL_\infty$  che non hanno poli nel semipiano positivo.

S'introduce adesso la condizione necessaria e sufficiente per definire due matrici *Left Coprime*.

Date  $\tilde{M}, \tilde{N} \in RH_\infty$  aventi lo stesso numero di righe.  $\tilde{M}, \tilde{N}$  sono *Left Coprime* se e solo se esistono  $U, V \in RH_\infty$  tali che:

$$\tilde{M}V - \tilde{N}U = I \quad (5.15)$$

La coppia  $\tilde{M}, \tilde{N}$  dove  $\tilde{M}, \tilde{N} \in RH_\infty$  costituisce una *Left Coprime Factorization (LCF)* di  $G \in \mathfrak{R}$  se e solo se:

- $\tilde{M}$  è quadrata e  $\det(\tilde{M}) \neq 0$
- $G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$
- $\tilde{M}, \tilde{N}$  sono *Left Coprime*

(5.16)

La coppia  $\tilde{M}, \tilde{N}$  dove  $\tilde{M}, \tilde{N} \in RH_\infty$  costituisce una *Normalized Left Coprime Factorization (NLCF)* di  $G \in R$  se e solo se  $\tilde{M}, \tilde{N}$  sono una *LCF* di  $G$  e

$$\tilde{M}\tilde{M}^* + \tilde{N}\tilde{N}^* = I \quad \forall s \in j\mathfrak{R} \quad (5.17)$$

Dato un sistema  $G \in \mathfrak{R}$  rappresentato dalle matrici  $(A, B, C, D)$  si definiscono

*Generalized Control Algebraic Riccati Equation (GCARE)*

$$(A - BS^{-1}D^*C)^*X + X(A - BS^{-1}D^*C) - XBS^{-1}B^*X + C^*R^{-1}C = 0 \quad (5.18)$$

*Generalized Filtering Algebraic Riccati Equation (GFARE)*

$$(A - BS^{-1}D^*C)Z + Z(A - BS^{-1}D^*C)^* - ZC^*R^{-1}CZ + BS^{-1}B^* = 0 \quad (5.19)$$

dove:

$$R = I + DD^* \quad (5.20)$$

$$S = I + D^*D$$

Se  $(A, B, C, D)$  sono controllabili e osservabili allora esiste una soluzione unica  $X = X^* > 0$  e  $Z = Z^* > 0$  all'equazioni 5.25 e 5.26.

Si definiscono il guadagno di controllo  $F$  e il guadagno di filtraggio  $H$ :

$$F \stackrel{\Delta}{=} -S^{-1}(D^*C + B^*X) \quad (5.21)$$

$$H \stackrel{\Delta}{=} -(BD^* + ZC^*)R^{-1}$$

Gli autovalori di  $(A + BF)$  e  $(A + HC)$  hanno parte reale strettamente negativa.

Per quanto riguarda la realizzazione della rappresentazione *NLCF* risulta necessaria e sufficiente soltanto il guadagno di filtraggio  $H$  in quanto

$$[\tilde{N}, \tilde{M}] \stackrel{s}{=} \left[ \begin{array}{c|c|c} A + HC & B + HD & H \\ \hline R^{-1/2}C & R^{-1/2}D & R^{-1/2} \end{array} \right] \quad (5.22)$$

La realizzazione 5.29 è minima se e solo se la realizzazione  $(A, B, C, D)$  è minima.

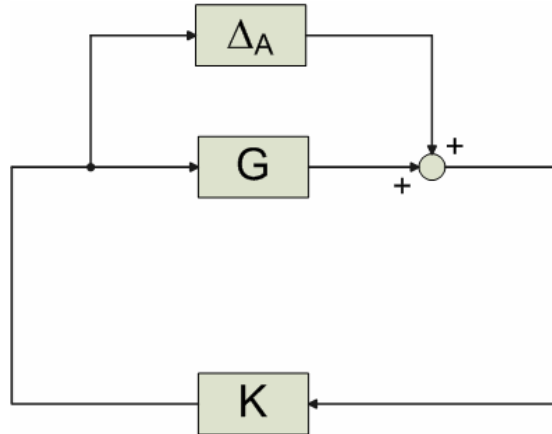


### 5.7.2 Rappresentazione incertezze

Si presenta ora la differenza nella rappresentazione e gestione delle incertezze da parte della tecnica di controllo *normalized coprime factor* rispetto all'approccio standard nella rappresentazione e gestione delle incertezze. Questo si traduce in un miglior il livello di robustezza.

Tipicamente le incertezze vengono rappresenta in due modi differenti:

#### 1. Incertezza Additiva



**Figura 5.10 – Incertezza Additiva**

Una perturbazione  $\Delta_A$  è un'incertezza additiva se

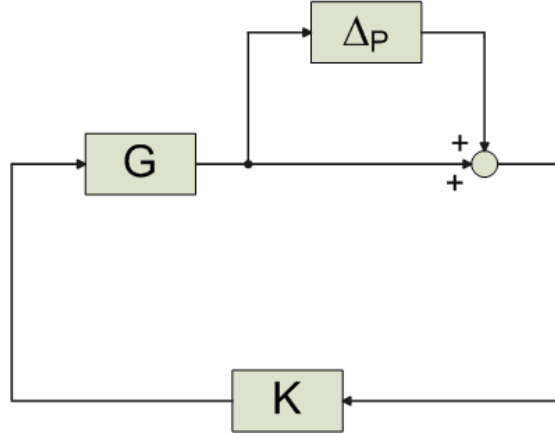
$$G_\Delta = G + \Delta_A \quad (5.23)$$

Esiste un corollario fondamentale che assicura la stabilità del sistema.

$K$  stabilizza la 5.30 per tutti i  $\Delta \in D\mathcal{E}$  se e solo se:

- $K$  stabilizza  $G$
  - $\|K(I - GK)^{-1}\|_\infty \leq e^{-1}$
- (5.24)

## 2. Incertezza Moltiplicativa



**Figura 5.11 – Incertezza Moltiplicativa**

Una perturbazione  $\Delta_p$  è un'incertezza moltiplicativa se:

$$G_\Delta = (I + \Delta_p)G \quad (5.25)$$

Anche in questo caso esiste un corollario fondamentale che ci assicura la stabilità del sistema.

$K$  stabilizza la 5.31 per tutti i  $\Delta \in D_\varepsilon$  se e solo se:

- $K$  stabilizza  $G$
  - $\|GK(I - GK)^{-1}\|_\infty \leq e^{-1}$
- (5.26)

I corollari sopra citati derivano dal teorema 3.3 di [1].

In entrambi i casi s'intende

$$D_\varepsilon = D_s^\Delta \cup D_U^\Delta \quad (5.27)$$

dove:

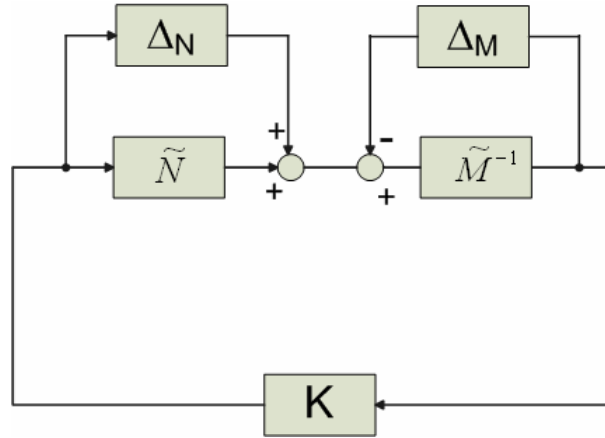
$$D_s^\Delta = \{\Delta : \Delta \in RH_\infty, \|\Delta\|_\infty < e\} \quad (5.28)$$

Rappresenta l'insieme di perturbazioni stabili e limitate.

$$D_U^\Delta = \{\Delta : \Delta \in RL_\infty, RHP_{Poles}(G) = RHP_{Poles}(G_\Delta), \|\Delta\|_\infty < e\} \quad (5.29)$$

Rappresenta l'insieme di perturbazioni limitate che lasciano il numero dei poli invariato.

Nella *Normalized Coprime Factor* le incertezze sono rappresentate da  $\Delta_N$  e  $\Delta_M$



**Figura 5.12 – Incertezze NCF**

$$G_{\Delta} = (\tilde{M} + \Delta_M)^{-1} (\tilde{N} + \Delta_N) \quad (5.30)$$

Il corollario fondamentale si formula nel seguente modo:

$K$  stabilizza la 5.36 per tutti i  $\Delta, [\Delta_N, \Delta_M] \in D_S \varepsilon$  se e solo se

- $K$  stabilizza  $G$
- $$\left\| \begin{bmatrix} K(I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \\ (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq e^{-1} \quad (5.31)$$

Un immediato beneficio che si nota dall'utilizzo di questo tipo di rappresentazione è che la classe d'incertezze non è limitata al tipo di perturbazioni che lasciano invariato il numero di poli nel semipiano positivo.

### 5.7.3 Problema di robustezza

Siano date  $\tilde{M}, \tilde{N}$  *normalized LCF* di  $G$ . Il maggior numero positivo  $e (= e_{MAX})$  tale che il sistema 5.36 sia stabilizzato da un singolo controllore  $K \forall \Delta \in D_c e$  è dato da:

$$e_{MAX} = (g_{MIN})^{-1} = \left( \inf_K \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_{\infty} \right)^{-1} \quad (5.32)$$

Il punto di forza della scelta di una rappresentazione *NLCF* risiede nell'immediatezza della soluzione, senza necessitare di iterazioni.

Se la coppia  $\tilde{M}, \tilde{N}$  non fosse normalizzata anche il metodo *LCF* necessiterebbe di iterazioni.

Si definiscono i gramiani di controllabilità ed osservabilità

$$P = \int_0^{\Delta} e^{At} B B^* e^{A^* t} dt$$

$$Q = \int_0^{\Delta} e^{A^* t} C^* C e^{At} dt \quad (5.33)$$

o anche in forma di unica soluzione dell'equazioni di Lyapunov

$$\begin{aligned} AP + PA^* + BB^* &= 0 \\ A^*Q + QA + C^*C &= 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Si definiscono i valori singolari di Hankel come

$$s_i = I_i^{1/2}(PQ), i = 1, \dots, n \quad (5.35)$$

ordinati per convenzione  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n \geq 0$ .

Si definisce la norma di Hankel

$$\|\bullet\|_H = s_1 \quad (5.36)$$

La soluzione ottima ai problemi di tipo *Nehari Extension Approach* consiste nell'approssimazione di una funzione di trasferimento instabile  $R$  con una funzione di trasferimento stabile  $Q$  dove  $Q$  è scelta tale che  $\|R + Q\|_\infty$  sia più piccola possibile.

In [1] si dimostra che:

$$\inf_{Q \in RH_\infty} \|R + Q\|_\infty = \|R^*\|_H \quad (5.37)$$

Andiamo adesso a formulare il problema in termini *NLCF* ed a calcolarne la soluzione, ovvero il controllore.

Un controllore  $K$  rende stabile il sistema  $G$  e soddisfa

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty \leq g \quad (5.38)$$

se e solo se  $K = UV^{-1}$  per  $U, V \in RH_\infty$  che soddisfino

$$\left\| \begin{bmatrix} -\tilde{N}^* \\ \tilde{M}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq (1 - g^{-2})^{-1/2} \quad (5.39)$$

La soluzione ottima al problema *NLCF* garantisce

$$\inf_K \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty = \left\{ 1 - \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{bmatrix}_H \right\|^2 \right\}^{-1/2} \quad (5.40)$$

ed ha come margine di stabilità

$$e_{MAX} = \left\{ 1 - \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{bmatrix}_H \right\|^2 \right\}^{1/2} > 0 \quad (5.41)$$

Il controllore ottimo risulta infine  $K = UV^{-1}$  per  $U, V \in RH_\infty$  che soddisfano

$$\left\| \begin{bmatrix} -\tilde{N}^* \\ \tilde{M}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{bmatrix}_H \right\| \quad (5.42)$$

Per determinare  $U$  e  $V$  [16],[17] si parte dal calcolare il seguente descrittore

$$E = Q_{NM} P_{NM} - r^2 I \quad (5.43)$$

e la sua decomposizione ai valori singolari.

$$E = [U_{E1} \quad U_{E2}] \begin{bmatrix} \Sigma_E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{E1}^T \\ V_{E2}^T \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Si applica la trasformazione alla realizzazione di  $E$  in matrici di stato

$$\left[ \begin{array}{c|c} \overline{Es - A} & \overline{B} \\ \hline \overline{C} & \overline{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} r^2 A_{NM}^T + Q A_{NM} P & Q B_{NM} \\ \hline C_{NM} P & D \end{array} \right] \quad (5.45)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] &= \begin{bmatrix} U_{E1}^T \\ U_{E2}^T \end{bmatrix} (r^2 A_{NM}^T + Q A_{NM} P) \begin{bmatrix} V_{E1} & V_{E2} \end{bmatrix} \\ \left[ \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right] &= \begin{bmatrix} U_{E1}^T \\ U_{E2}^T \end{bmatrix} Q B_{NM} \\ \left[ C_1 \quad C_2 \right] &= C_{NM} P \begin{bmatrix} V_{E1} & V_{E2} \end{bmatrix} \\ D_1 &= D_{NM} \end{aligned} \quad (5.46)$$

La realizzazione  $[U \ V]$  risulta infine essere:

$$[U \quad V] = \left[ \begin{array}{c|c} \Sigma_E^{-1} (A_{11} - A_{12} A_{22}^+ A_{21}) & \Sigma_E^{-1} (B_1 - A_{12} A_{22}^+ B_2) \\ \hline C_1 - C_2 A_{22}^+ A_{21} & D_1 - C_2 A_{22}^+ B_2 \end{array} \right] \quad (5.47)$$

dalla quale si possono estrapolare, secondo la struttura 5.29, le matrici  $[A, B, C, D]$  del nostro controllore.

### 5.7.4 Proprietà

Il vantaggio di un metodologia di tal tipo va inteso come un approccio più diretto al problema rispetto ad un classico generico approccio *H infinito*: un'analisi migliore e più approfondita della natura del problema.

Il margine di stabilità calcolato nella formula 5.47 è sorprendentemente esplicito rispetto ad un problema di ottimo *H infinito* in cui sarebbero richieste numerose iterazioni prima di giungere ad un'approssimazione di  $e_{MAX}$ .

Si noti poi che essendo  $\left\| \begin{bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{bmatrix} \right\|_H < 1$  risulterà  $0 < e_{MAX} < 1$ .

Andiamo ad analizzare come reagisce il sistema in seguito a perturbazioni, nel caso in cui  $e_{MAX} \ll 1$ .

Il sistema perturbato 5.36 presenta nell'intervallo di frequenza di cross-over  $\bar{S}(\tilde{M})$  e  $\bar{S}(\tilde{N})$  di ordine uno, quindi  $e_{MAX} \ll 1$ : questa situazione implica che, risulta sufficiente una piccola perturbazione proporzionale su  $\tilde{M}$  o  $\tilde{N}$  per rendere instabile il sistema.

Comunque a frequenze dove il guadagno è alto ( $\underline{S}(G) \gg 1$ ) abbiamo  $\bar{S}(\tilde{M}) \ll 1$  ed anche se  $e_{MAX} \ll 1$  solo una grossa perturbazione proporzionale su  $\tilde{M}$  è necessaria per destabilizzare il sistema a ciclo chiuso.

Analogamente a frequenze dove il guadagno è piccolo  $\bar{S}(G) \ll 1$  abbiamo  $\bar{S}(\tilde{N}) \ll 1$  ed anche se  $e_{MAX} \ll 1$  solo una grossa perturbazione proporzionale su  $\tilde{N}$  è necessaria per destabilizzare il sistema a ciclo chiuso.

Tutte le trattazioni fin qui effettuate sono da considerarsi valide anche per un tipo di rappresentazione *Normalized Right Coprime Factor*.

Il problema analogo viene infatti posto nei soliti termini con la semplice sostituzione di alcune notazioni  $G_\Delta = (N + \Delta_N)(M + \Delta_M)^{-1}$  dove  $N, M$  sono normalizzate.

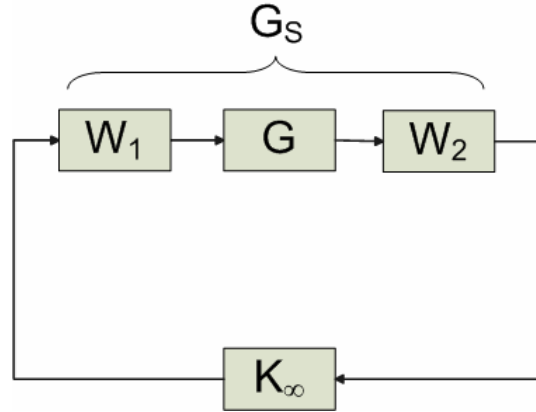
Il margine di stabilità massimo risulterà

$$e_{MAX} = \left\{ 1 - \left\| \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \right\|_H^2 \right\}^{1/2} \quad (5.48)$$

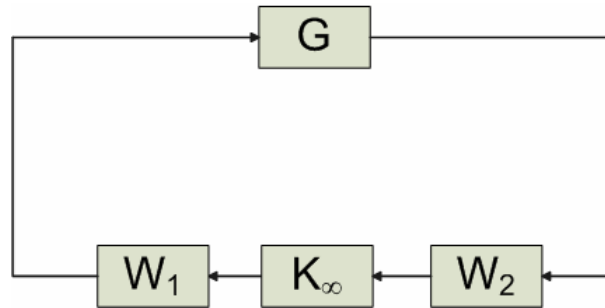
Mentre il controllore ottimo risulterà  $K = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$  dove  $\tilde{U}, \tilde{V} \in RH_\infty$  e rappresentano l'estensione ottima del problema di *Nehari* per  $[-N^*, M^*]$ .

## 5.8 Parametri NCF

Per formulare il problema in termini di Loop Shaping bisogna introdurre un pre e/o post compensatore  $W_1$  e  $W_2$ .



*Figura 5.13 – Loop Shaping NCF*



*Figura 5.14 – Framework controllore NCF*

Si è scelto, per modificare i valori singolari, di utilizzare solo il pre compensatore  $W_1$ , composto solo da guadagni, dato che si sono già inseriti precedentemente gli integratori (tramite aumento dello stato).

$$W_1 = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_4 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Per scegliere il valore dei guadagni si è proceduto come suggerito in [3], [4], [5].

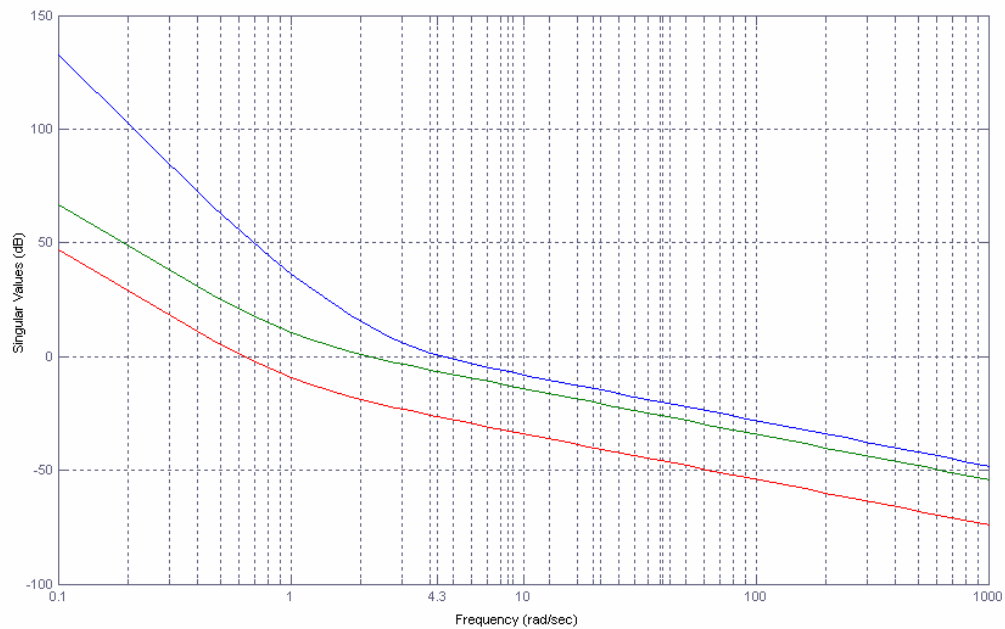
Si calcola l'entità dei valori singolari alla frequenza di cross-over desiderata, andando così ad identificare i 4 guadagni di  $W_I$ .

Si è scelta una frequenza di cross-over pari a 4.3 rad/sec ottenendo la seguente matrice

$$W_I = \begin{bmatrix} 21.5093 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9668 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9668 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.1875 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

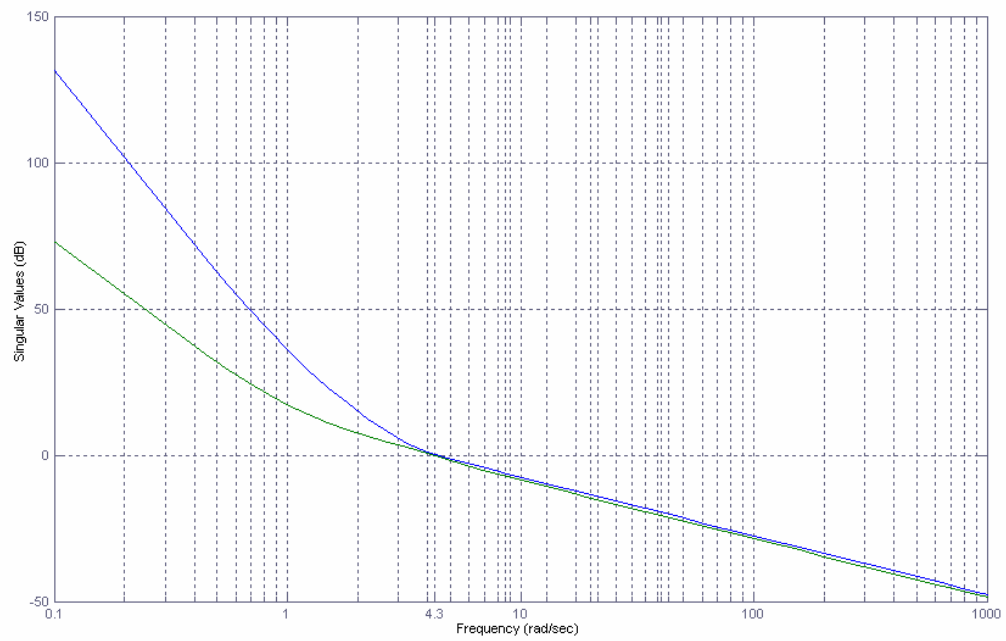
Di seguito si può notare come l'andamento dei valori singolari assuma la forma di figura 5.3 ed effettivamente presenti la frequenza di cross-over desiderata.

Il nostro controllore presenta un  $e_{MAX}$  pari a 0.28: il valore tipicamente accettato come condizione necessaria e sufficiente per un'ottima robustezza del controllore è 0.25.

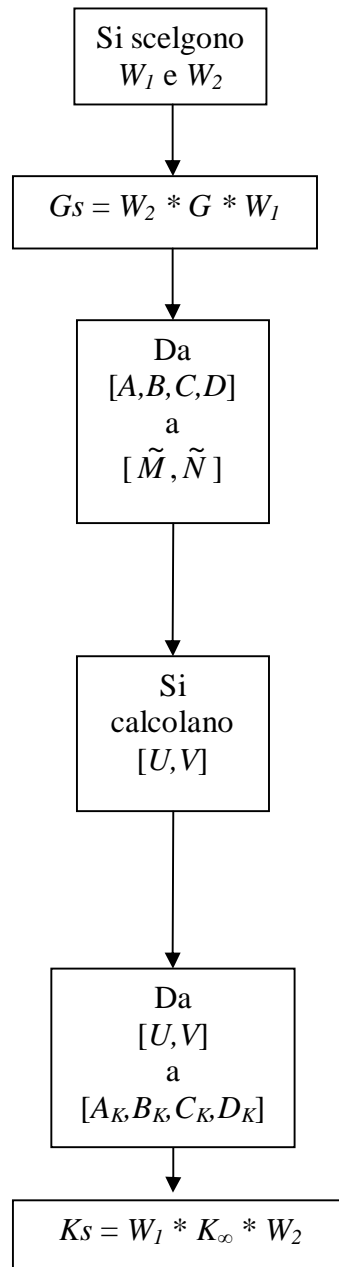


**Figura 5.15** – Valori singolari  $G$



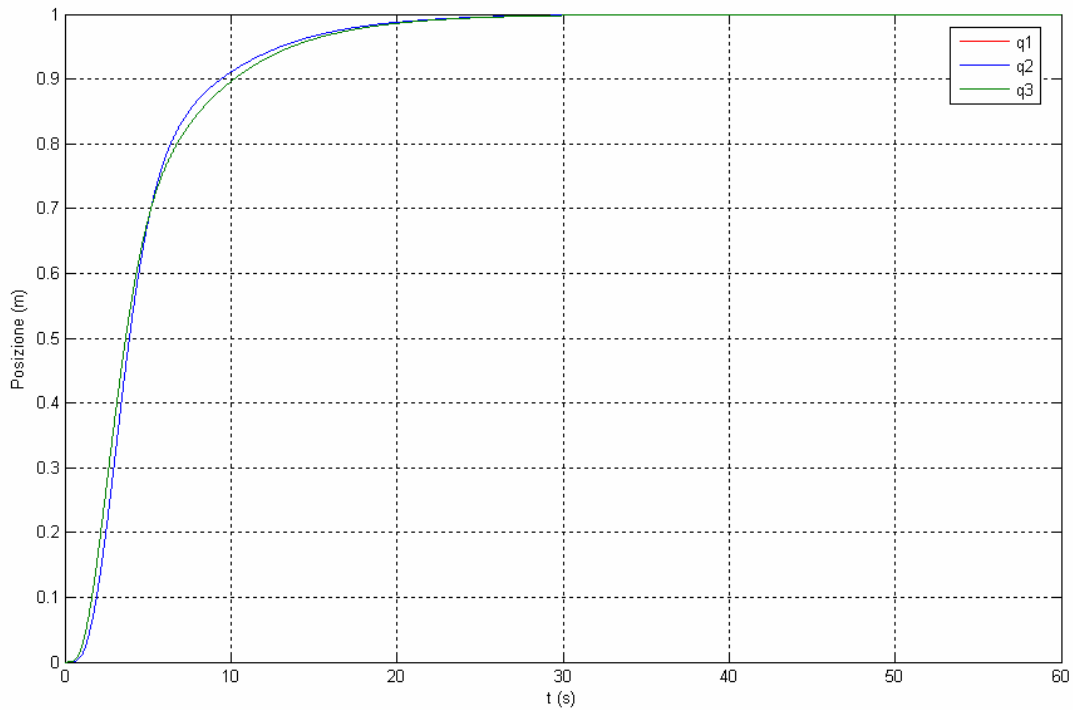


**Figura 5.16** – Valori singolari  $G_s$



**Figura 5.17** – Algoritmo progettazione controllore NCF

## 5.9 Risultati NCF (Simulazione)

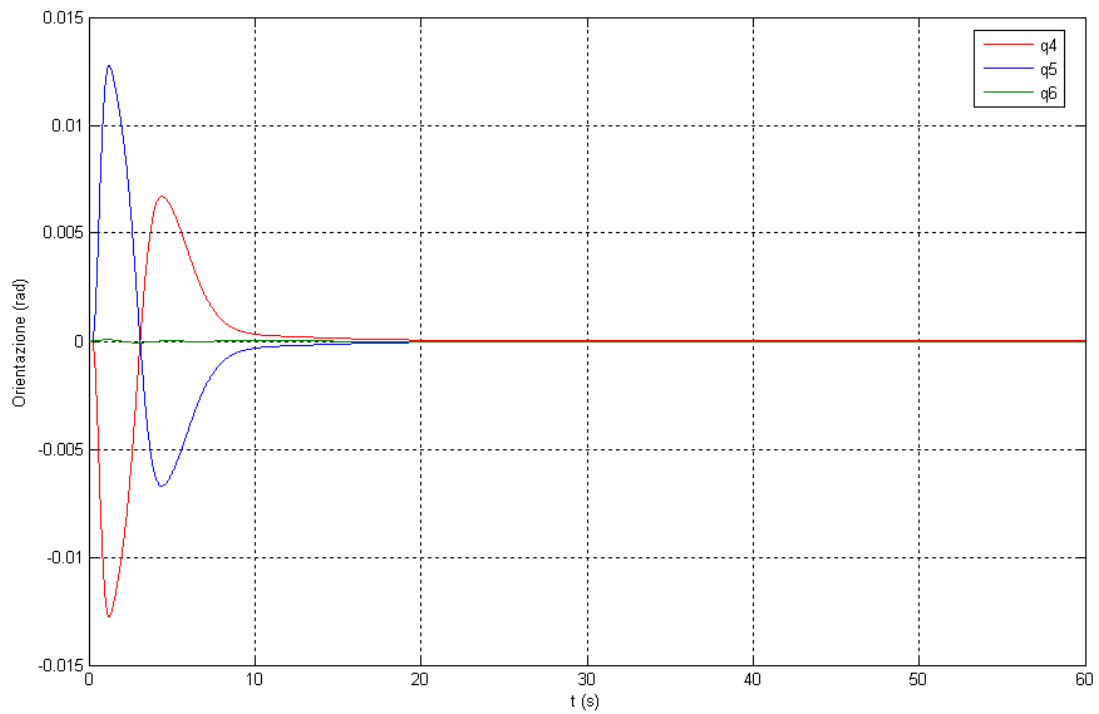


**Figura 5.18** –  $q_1, q_2, q_3$  NCF (Simulazione)

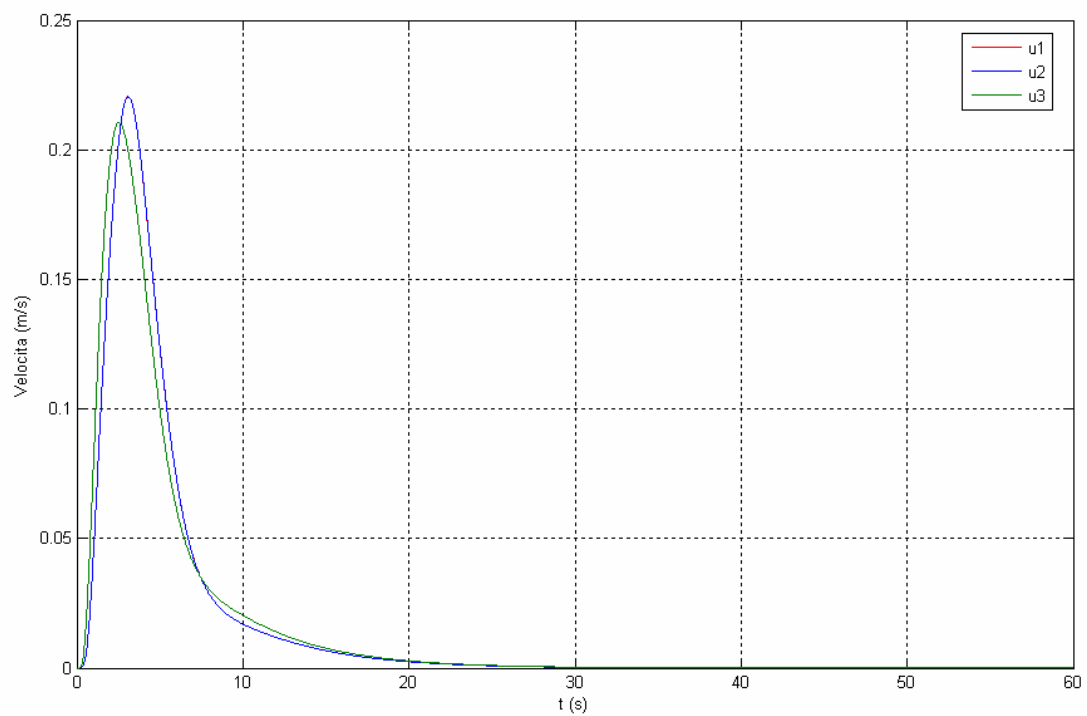
Dal grafico qui sopra si può notare come la risposta non presenti Overshoot in nessuna delle tre coordinate. Il sistema impiega circa 30 secondi per raggiungere il riferimento.

Per quanto riguarda le altre variabili (orientazione, velocità e velocità angolari) si può notare anche qui la presenza di un Overshoot iniziale dovuto ancora alla fase di assestamento in seguito al decollo.

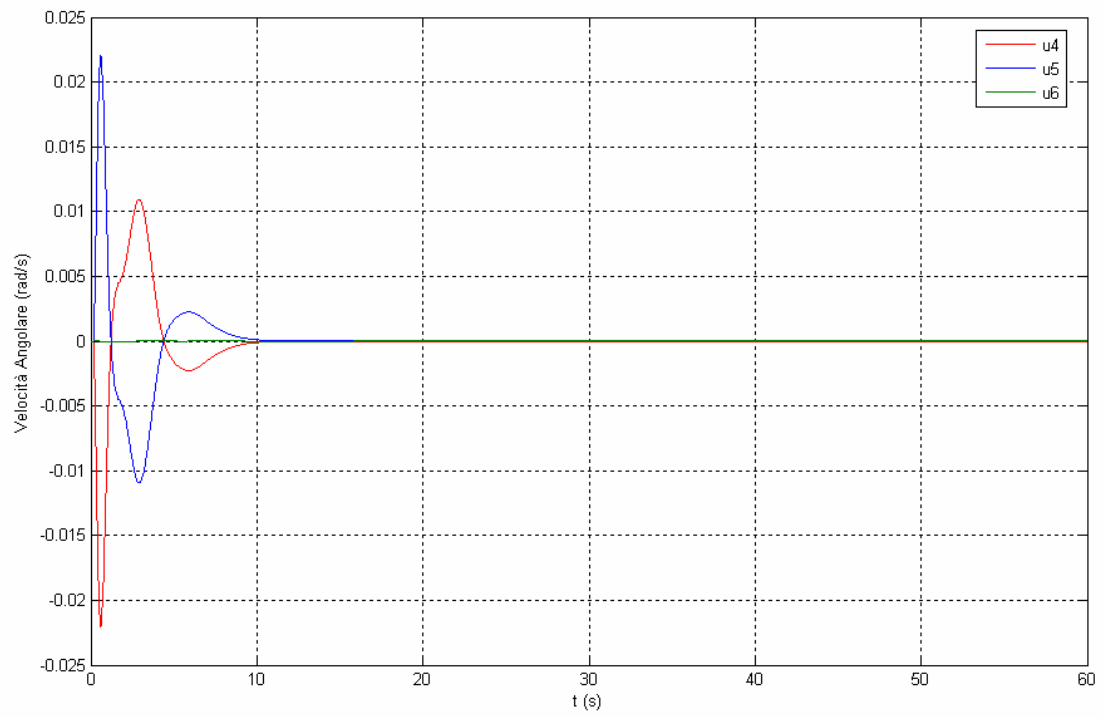
Si può notare però come l'entità sia notevolmente minore rispetto al controllore LTR.



**Figura 5.19** –  $q_4, q_5, q_6$  NCF (Simulazione)



**Figura 5.20** –  $u_1, u_2, u_3$  NCF (Simulazione)

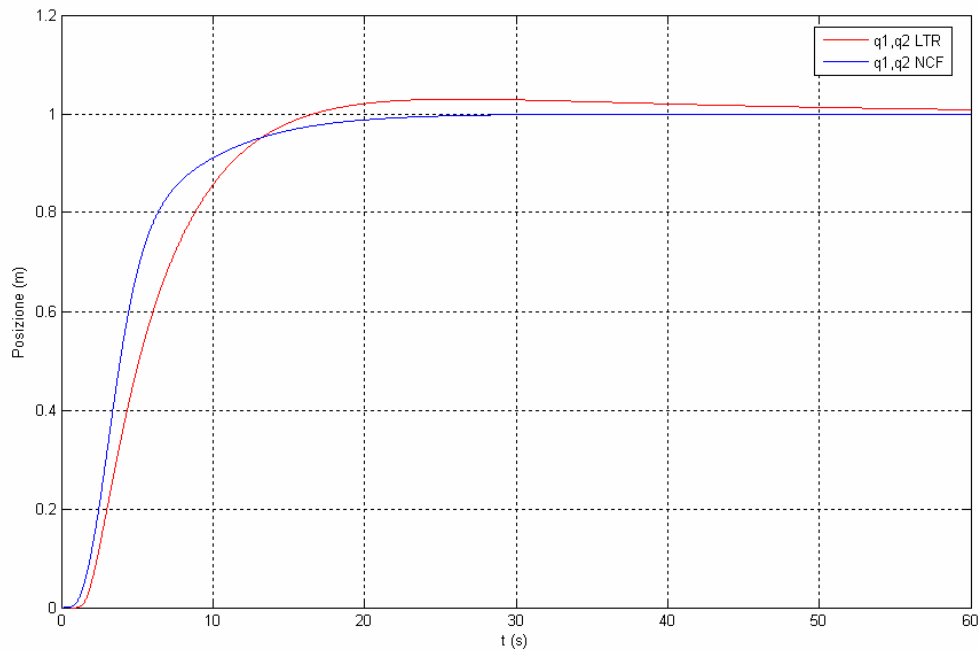


**Figura 5.21** –  $u_4, u_5, u_6$  NCF (Simulazione)

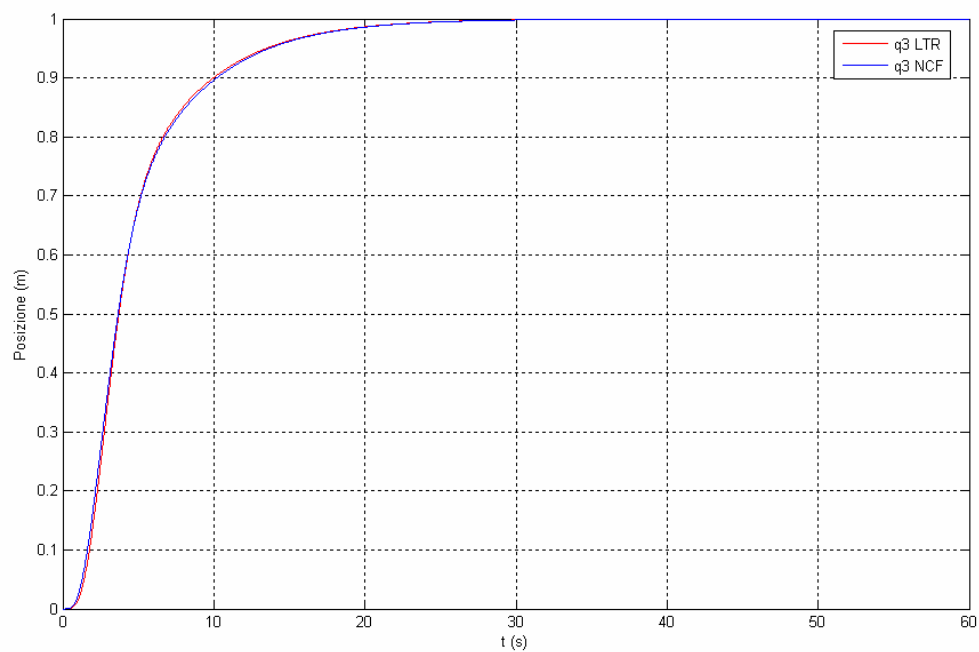
## 5.10 Confronto LTR-NCF (Simulazione)

Si può notare dalle figure sottostanti come l'andamento dei due controllori differisca soprattutto per le variabili  $q_1$  e  $q_2$ .

Lo stesso comportamento sarà riscontrato nei test di volo reali (cfr. 6.3).



**Figura 5.22** –  $q_1, q_2$  LTR-NCF (Simulazione)

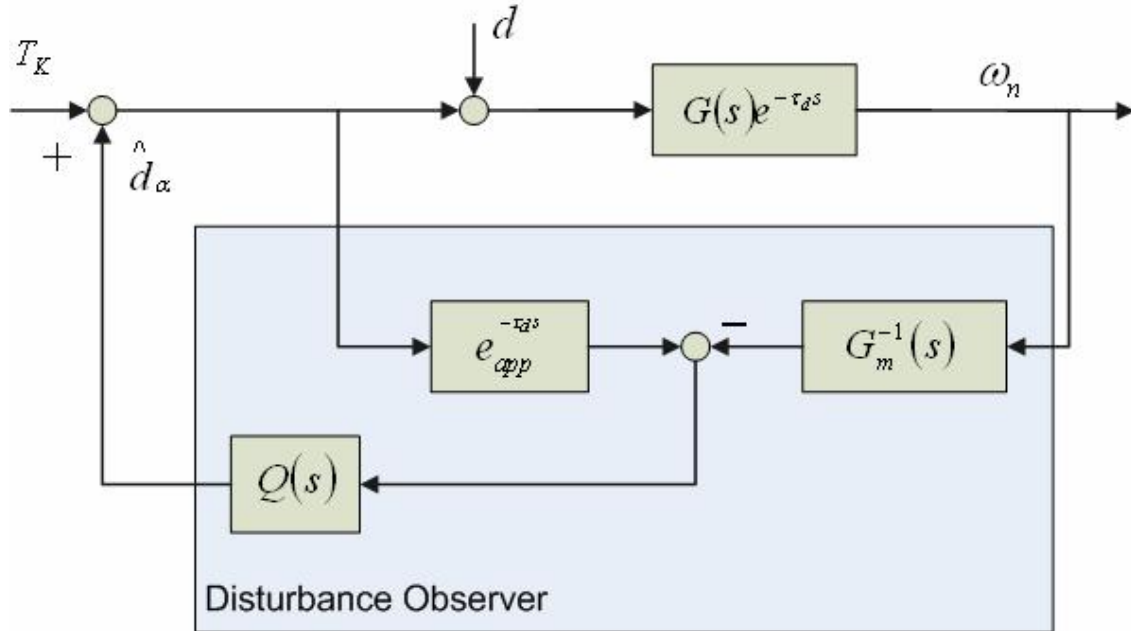


**Figura 5.23** –  $q_3$  LTR-NCF (Simulazione)

## 5.11 Disturbance Observer

Si è visto che la sola introduzione del ritardo nel modello tramite un'approssimazione di Padè del secondo ordine non è sufficiente per garantire un buon controllo.

Si è scelto dunque d'introdurre un Disturbance Observer che permettesse una miglior gestione del ritardo.



**Figura 5.24** – Framework generica Disturbance Observer

Nella struttura proposta in [8] e [9] la forma più semplice per  $Q(s)$  è un filtro passa basso con denominatore del primo ordine:

$$Q(s) = \frac{1}{1 + st} \quad (5.51)$$

Il valore di  $t$  è definito sperimentalmente tranne per il limite inferiore che viene imposto dallo studio della stabilità della funzione di trasferimento rispetto allo schema di figura 5.24.

$$\begin{bmatrix} w_n \\ \hat{d}_a \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \Delta(s)} \begin{bmatrix} Ge^{-t_d s} & Ge^{-t_d s}(Q - 1) \\ \Delta(s) & QGe^{-t_d s}G_m^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_K \\ d \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

dove:

$$\Delta(s) = Q - QGe^{-t_d s}G_m^{-1} \quad (5.53)$$

Sviluppando la 5.52 con la 5.53:

$$w_n(s) \cong \frac{(t_d^2 s^2 - 6t_d s + 12)[(1 + ts)T_K(s) - tsd(s) - G_m^{-1}(s)]}{[tt_d^2 s^3 + (6tt_d + t_d^2)s^2 + (12t - 6t_d)s + 12]G_m^{-1}(s)} \quad (5.54)$$

Si applica il criterio di Routh-Hourwitz al denominatore dell'espressione 5.54 ottenendo:

$$t > \frac{3 + \sqrt{21}}{12} t_d \cong 0.63 t_d \quad (5.55)$$

## 5.12 Framework sistema Quad

Partendo dalla 6.5, ricordando che il nostro  $t_d = 0.15$ , si è scelto  $t = 0.1$ .

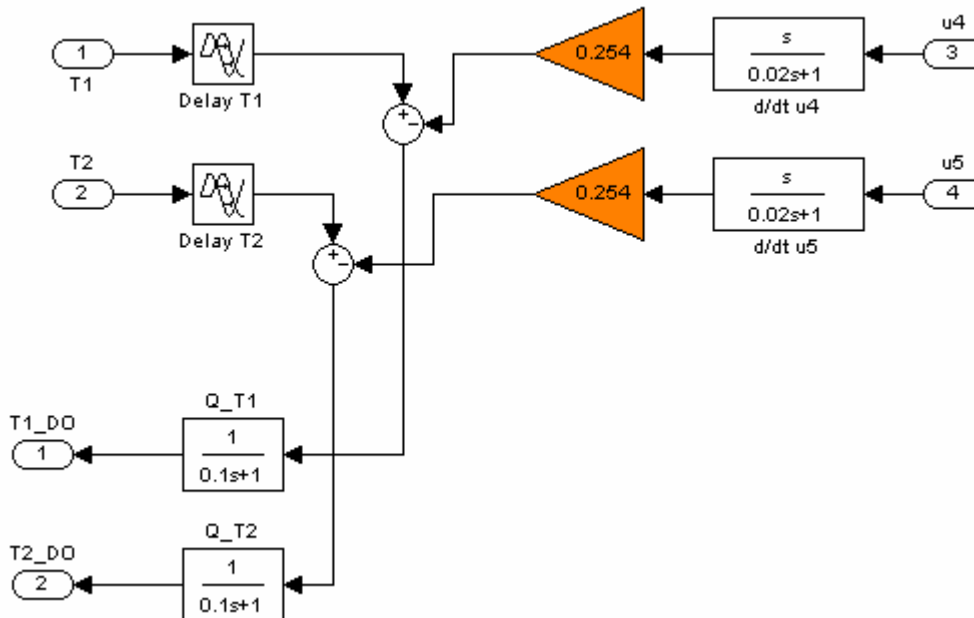
Per quanto riguarda  $G_m^{-1}(s)$  si è scelto di utilizzare il Disturbance Observer solamente per i momenti  $T_1$  e  $T_2$  dato che le variabili più influenzate risultano essere  $q_1$  e  $q_2$ .

Si è scelto di approssimare  $T_1$  e  $T_2$  con le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} T_1 &\cong \dot{u}_4 I \\ T_2 &\cong \dot{u}_5 I \end{aligned} \quad (6.6)$$

Si è scelto di utilizzare le 2.10 considerando il prodotto fra due velocità nullo.

La struttura finale del nostro Disturbance Observer risulta quindi essere:



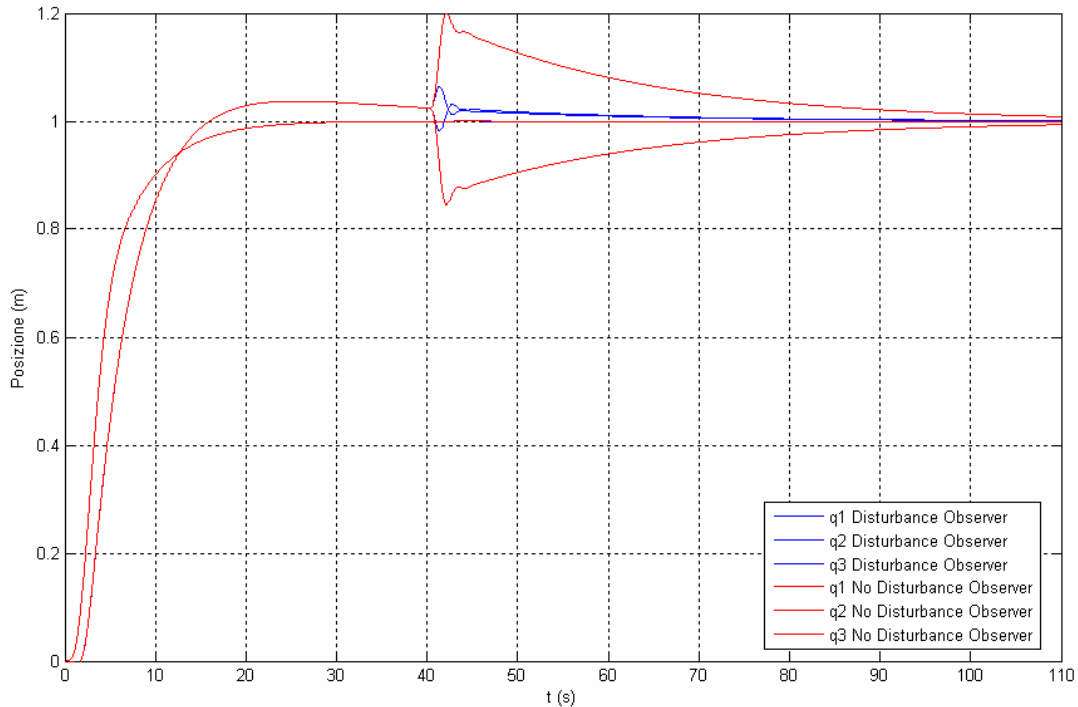
**Figura 5.25** – Disturbance Observer per il Quad



### 5.13 Risultati Disturbance Observer (Simulazione)

Per testare l'efficienza del Disturbance Observer si è applicato un gradino additivo all'uscita del controllore (su  $T_1$  e  $T_2$ ) di ampiezza 0.1 all'istante di tempo 40s.

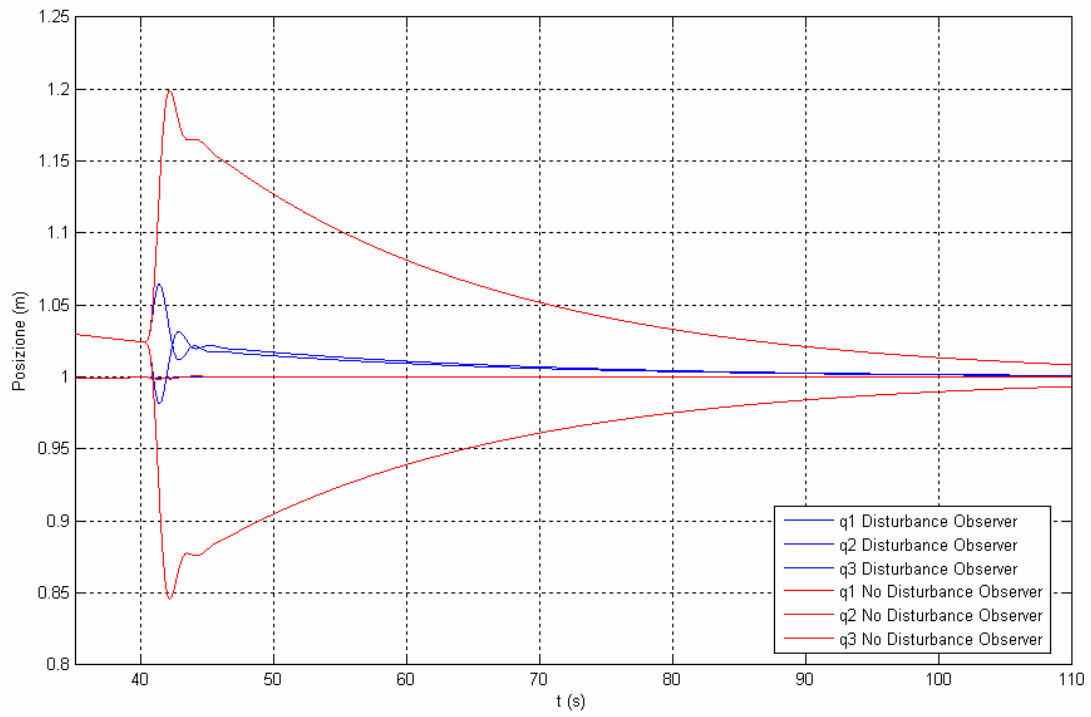
Di seguito i risultati ottenuti tramite il controllore *LTR*.



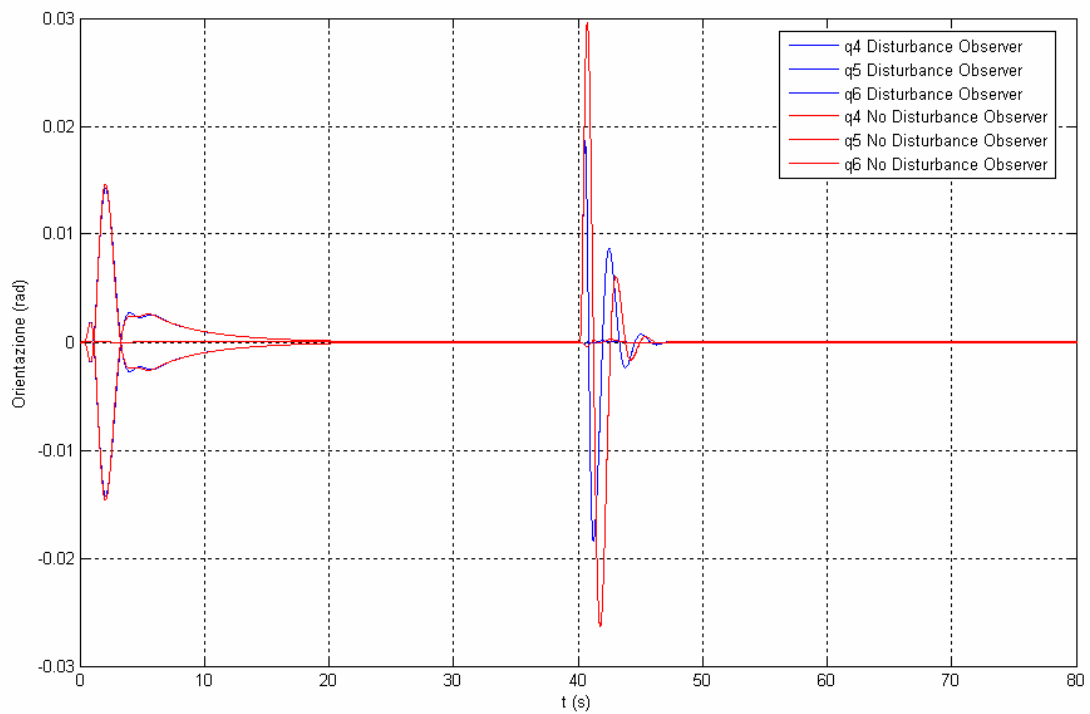
**Figura 5.26 –  $q_1, q_2, q_3$  LTR+DO**

Si può notare come i risultati siano notevolmente migliorati in presenza del Disturbance Observer, per tutte le variabili misurate o osservate (posizione, orientazione, velocità e velocità angolari).

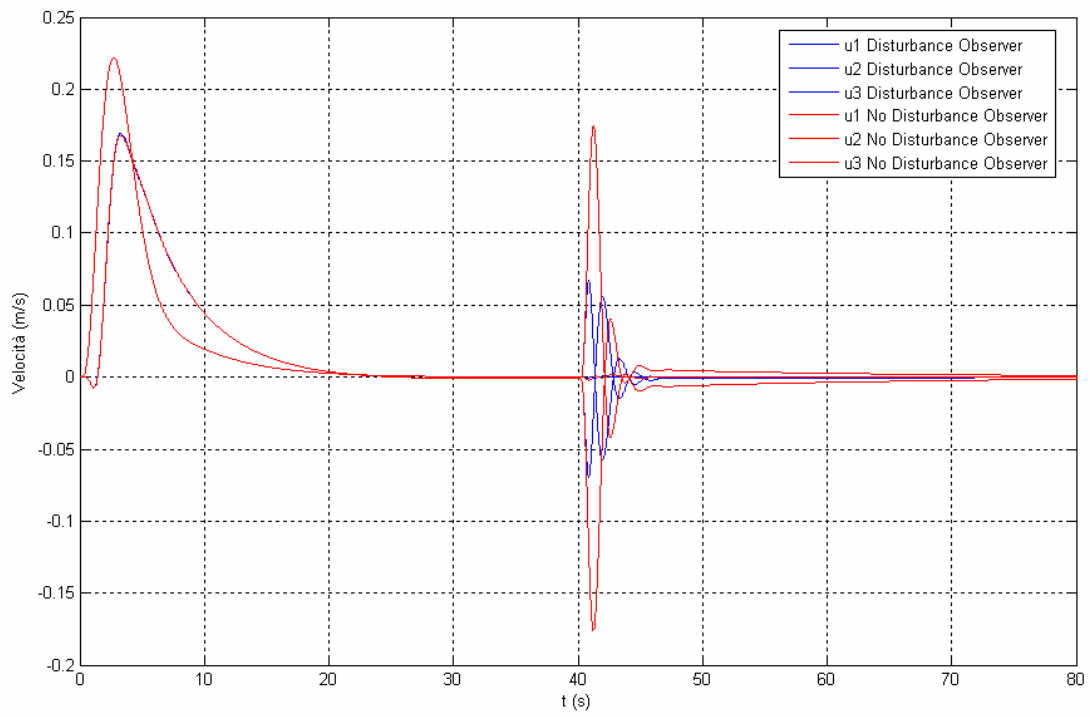
Risulta tuttavia ancora poco soddisfacente l'andamento generale ottenuto tramite il controllore *LTR*.



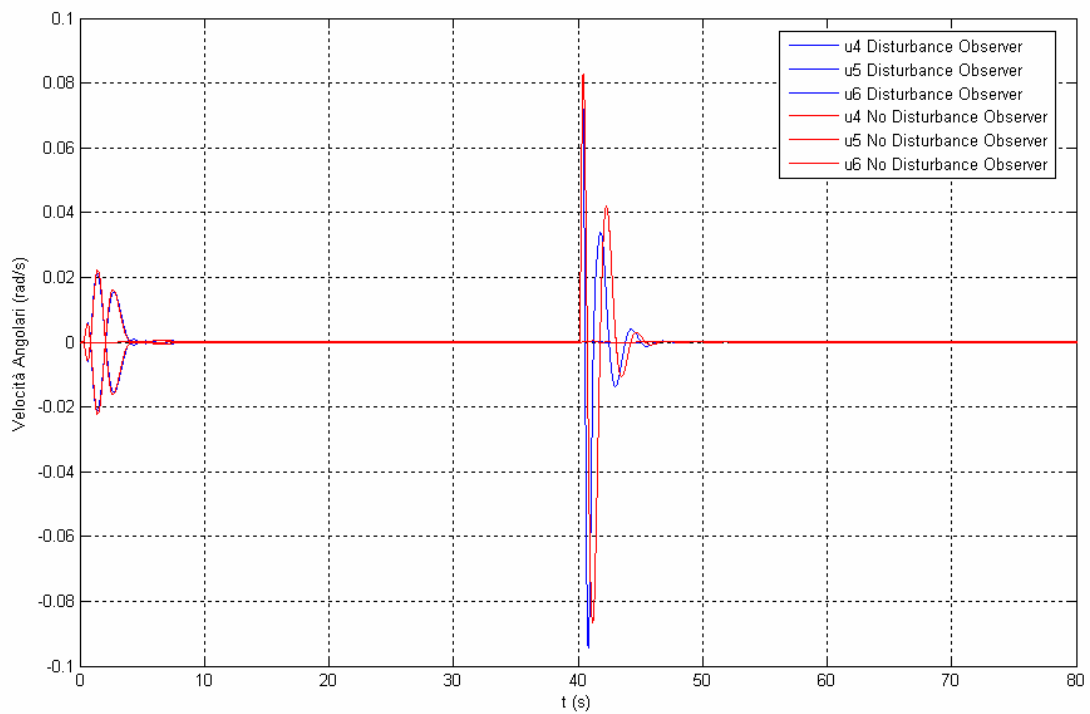
**Figura 5.27** –  $q_1, q_2, q_3$  LTR+DO (Particolare)



**Figura 5.28** –  $q_4, q_5, q_6$  LTR+DO



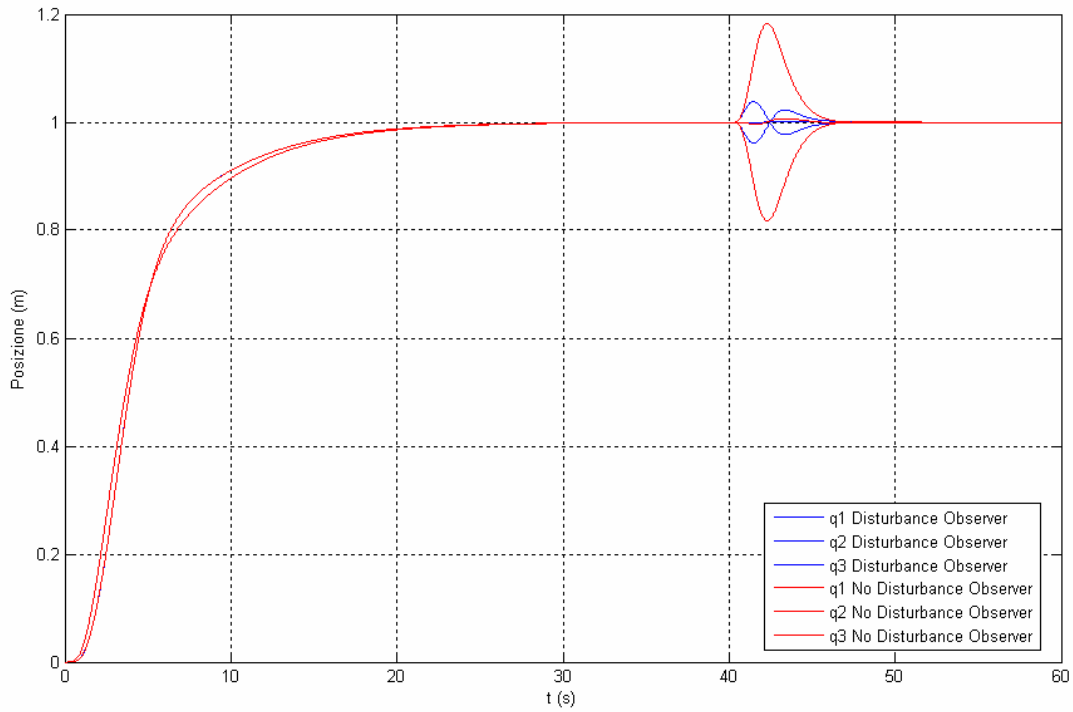
**Figura 5.29** –  $u_1, u_2, u_3$  LTR+DO



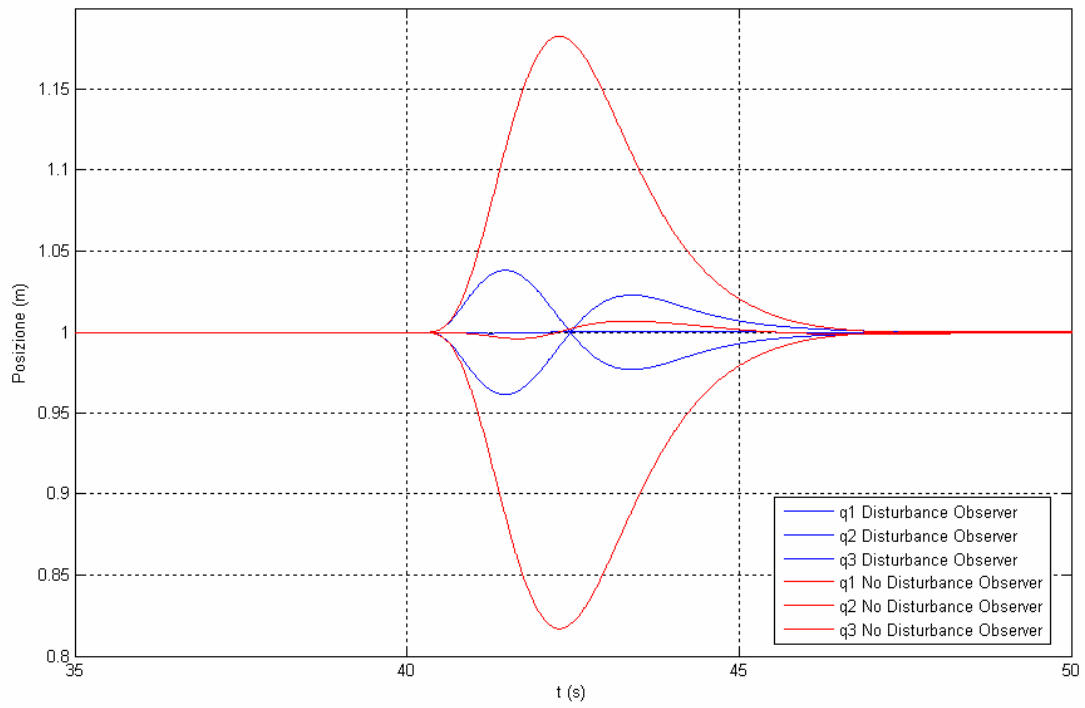
**Figura 5.30** –  $u_4, u_5, u_6$  LTR+DO

Si riportano anche i risultati ottenuti con il controllore *NCF*, al quale è stato applicato il medesimo disturbo.

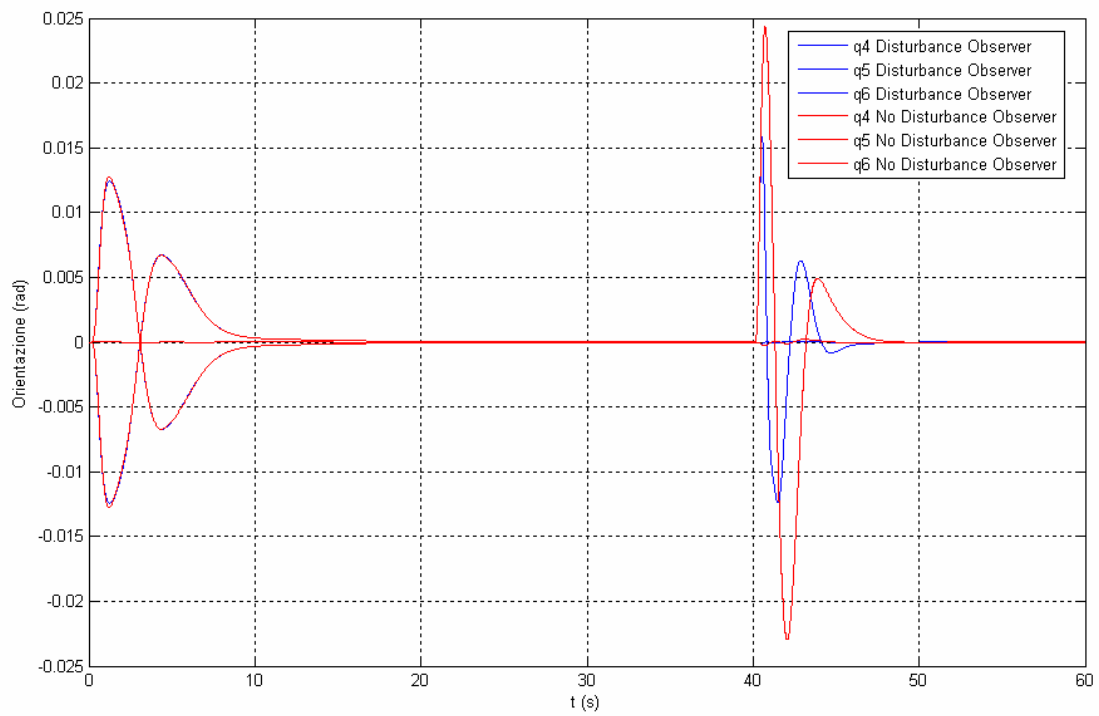
Si può notare la miglior efficienza nella risposta per tutte le variabili misurate o osservate (posizione, orientazione, velocità e velocità angolari).



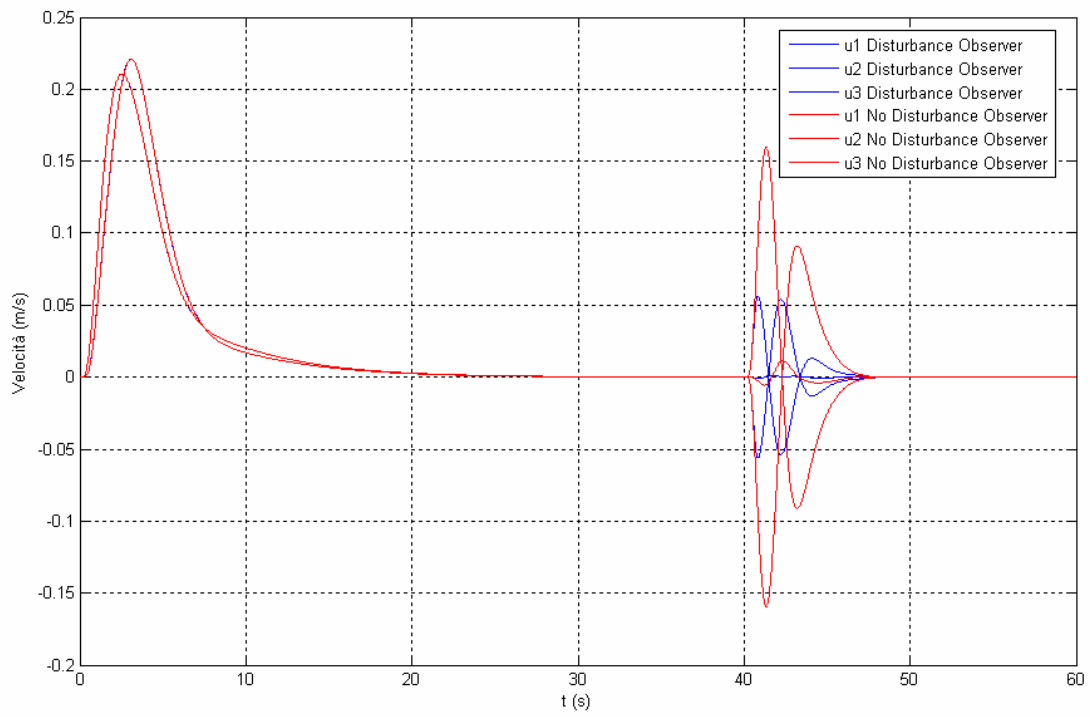
**Figura 5.31** –  $q_1, q_2, q_3$  *NCF+DO*



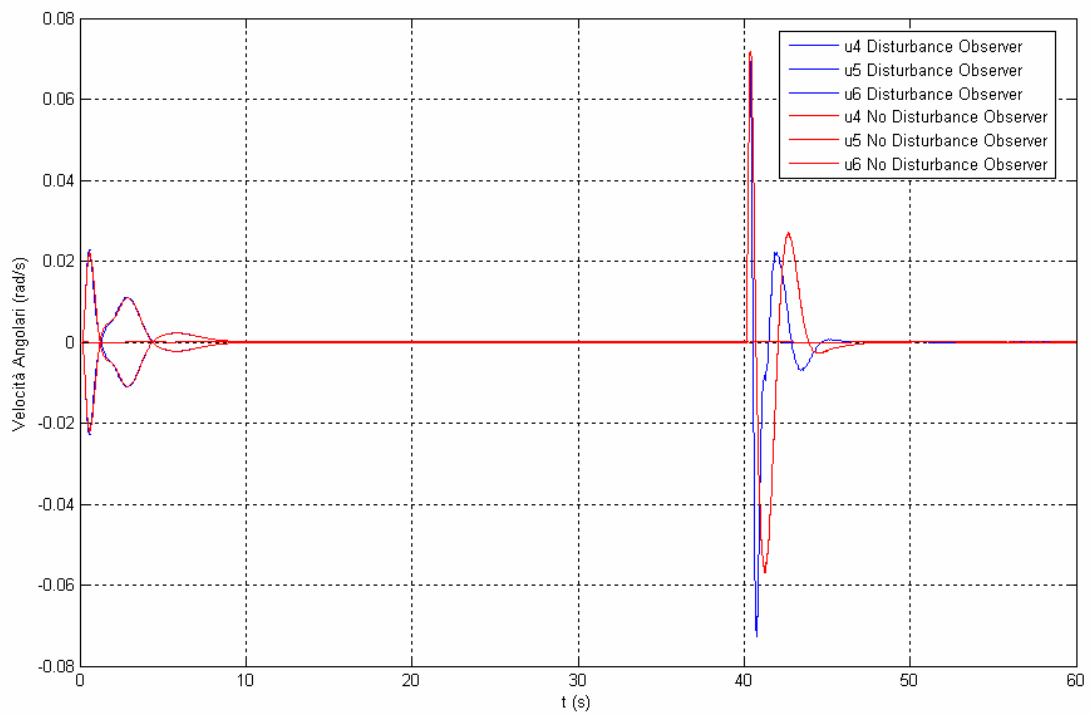
**Figura 5.32** –  $q_1, q_2, q_3$  NCF+DO (Particolare)



**Figura 5.33** –  $q_4, q_5, q_6$  NCF+DO



**Figura 5.34** –  $u_1, u_2, u_3$  NCF+DO



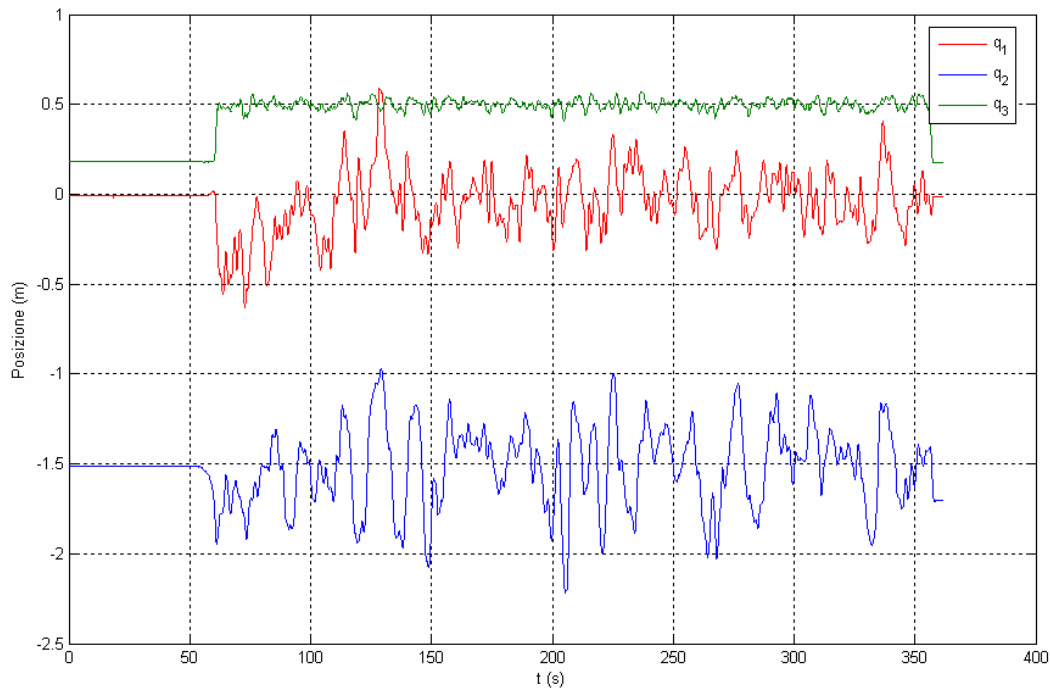
**Figura 5.35** –  $u_4, u_5, u_6$  NCF+DO

## 5.14 Risultati Voli Reali

Il passo più importante rimangono, ovviamente, i test sul velivolo reale.

Tramite la già sopra descritta piattaforma di volo (cfr. paragrafo 2.5) si sono potuti testare i due controllori precedentemente sviluppati ed accuratamente progettati in simulazione.

Per quanto riguarda il Disturbance Observer si è scelto di utilizzare una slider-gain in modo da poter gradualmente inserirne il contributo.



**Figura 5.36 –  $q_1, q_2, q_3$  LTR (Volo Reale)**

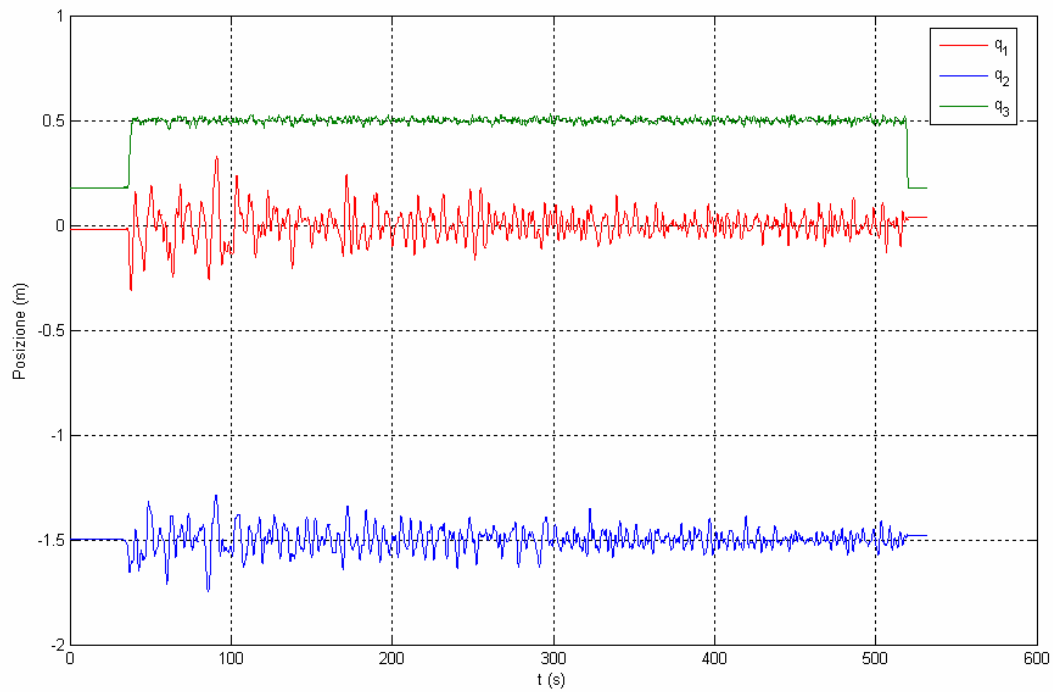
Si può notare come i problemi più grossi si abbiano soprattutto nella precisione relativa a  $q_1$  (in blu) e  $q_2$  (in verde), nonostante l'inserimento del Disturbance Observer.

Si può invece notare dalla figura seguente come il controllore  $H_\infty$  NCF abbia prestazioni di gran lunga migliori, arrivando ad una precisione di circa 5 cm anche per  $q_1$  e  $q_2$ .

Risulta visibile inoltre come vari il comportamento in conseguenza dell'inserimento graduale del contributo del Disturbance Observer.

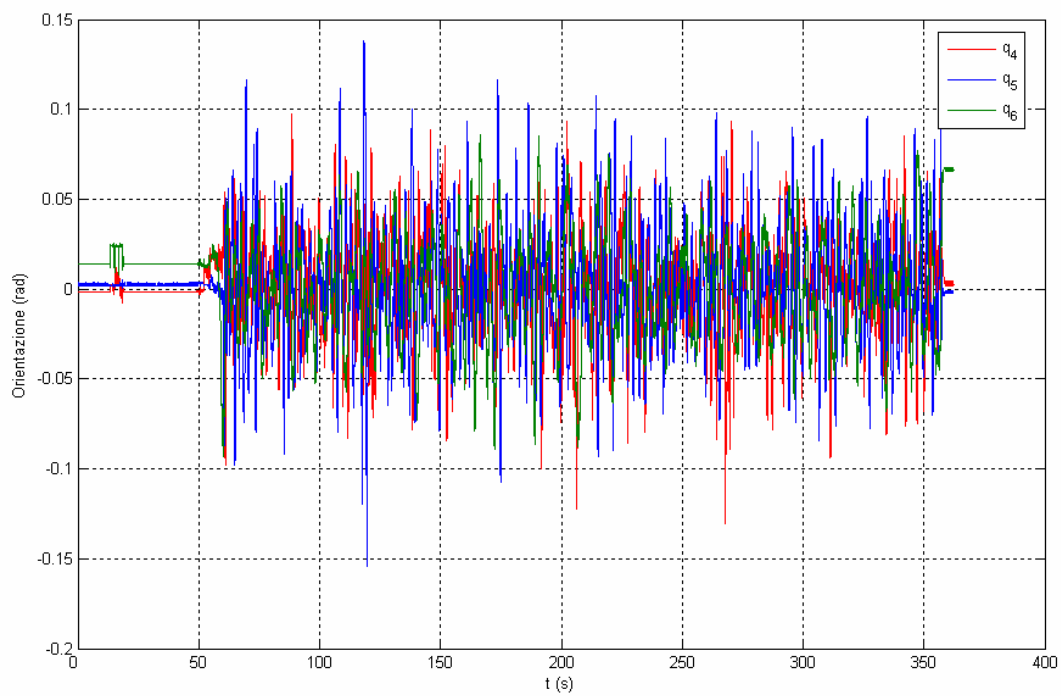
La parte in cui si ha più accuratezza risulta essere quella in cui la l'output del Disturbance Observer viene moltiplicato per 0.81.

Si noti come il comportamento su  $q_3$  sia molto simile (come da simulazione) e come anche nella fase di decollo vi sia una differenza notevole.



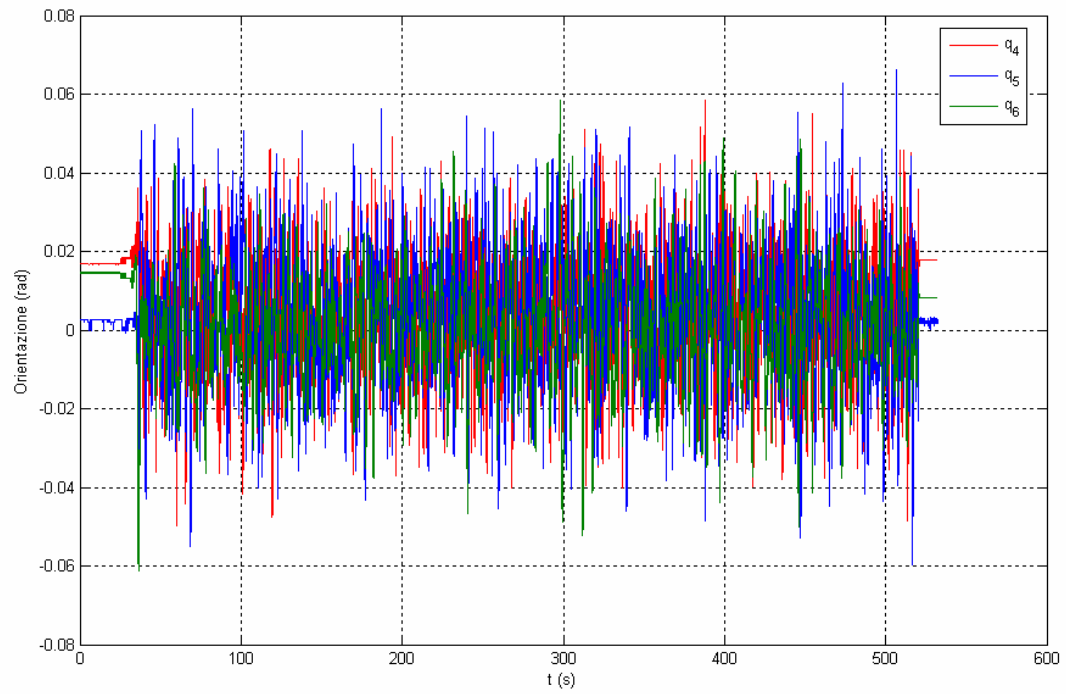
**Figura 5.37** –  $q_1, q_2, q_3$  NCF (Volo Reale)

La differenza di performance risulta evidente anche dal confronto delle prestazioni per quanto riguarda l'orientazione.



**Figura 5.38** –  $q_4, q_5, q_6$  LTR (Volo Reale)

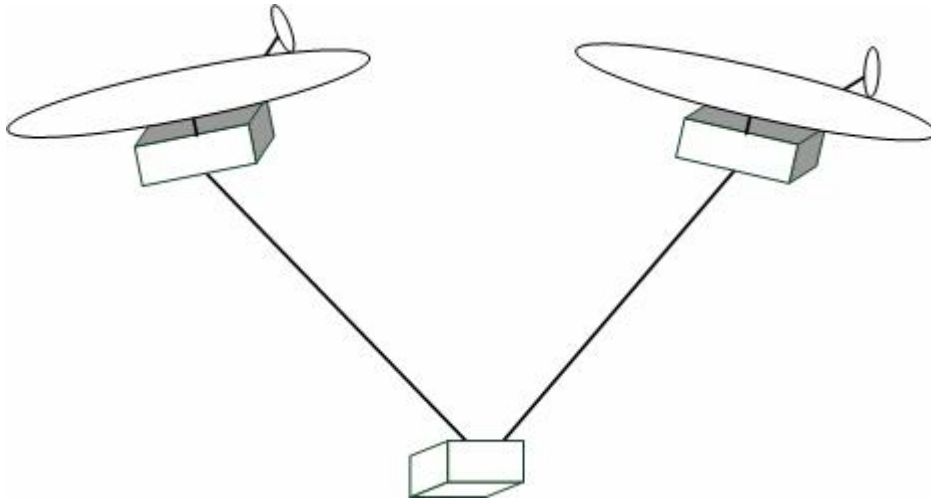




**Figura 5.39** –  $q_4, q_5, q_6$  NCF (Volo Reale)

## 6.1 Introduzione

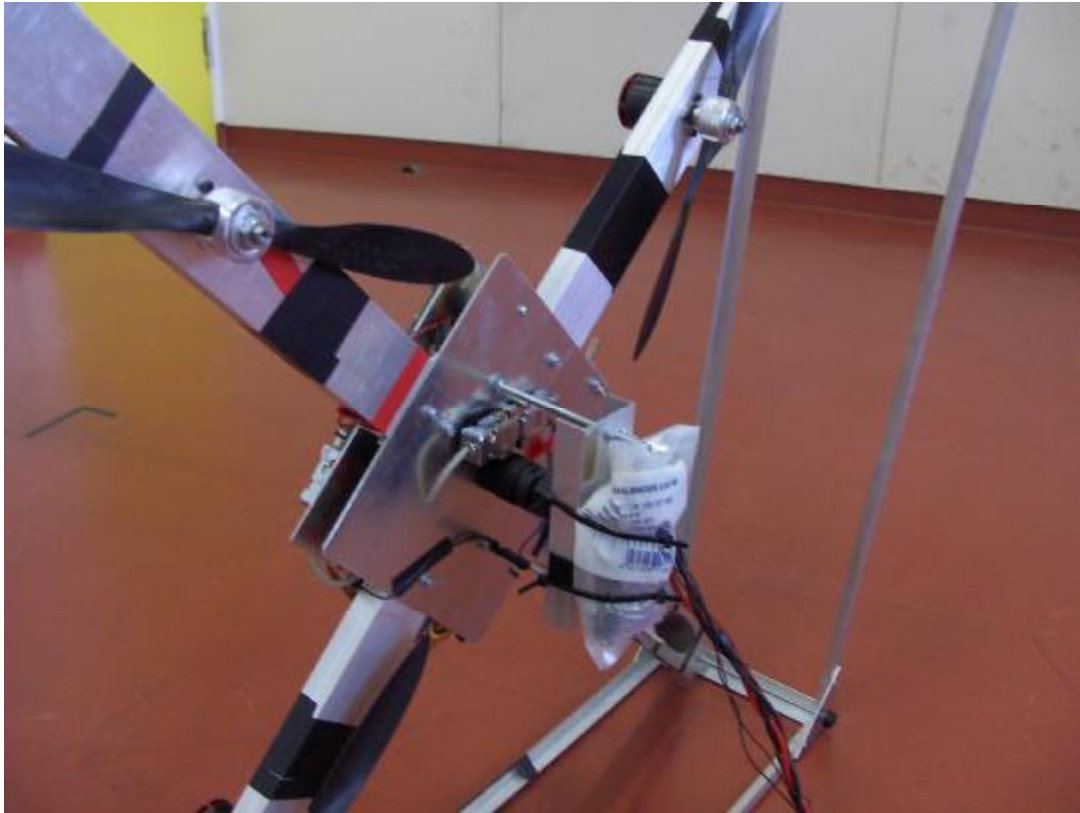
Un punto cruciale del progetto AWARE risulta essere il trasporto di carichi. La finalità è un trasporto realizzato da più UAVs in cooperazione.



**Figura 6.1** – Trasporto pesi fra UAVs in cooperazione

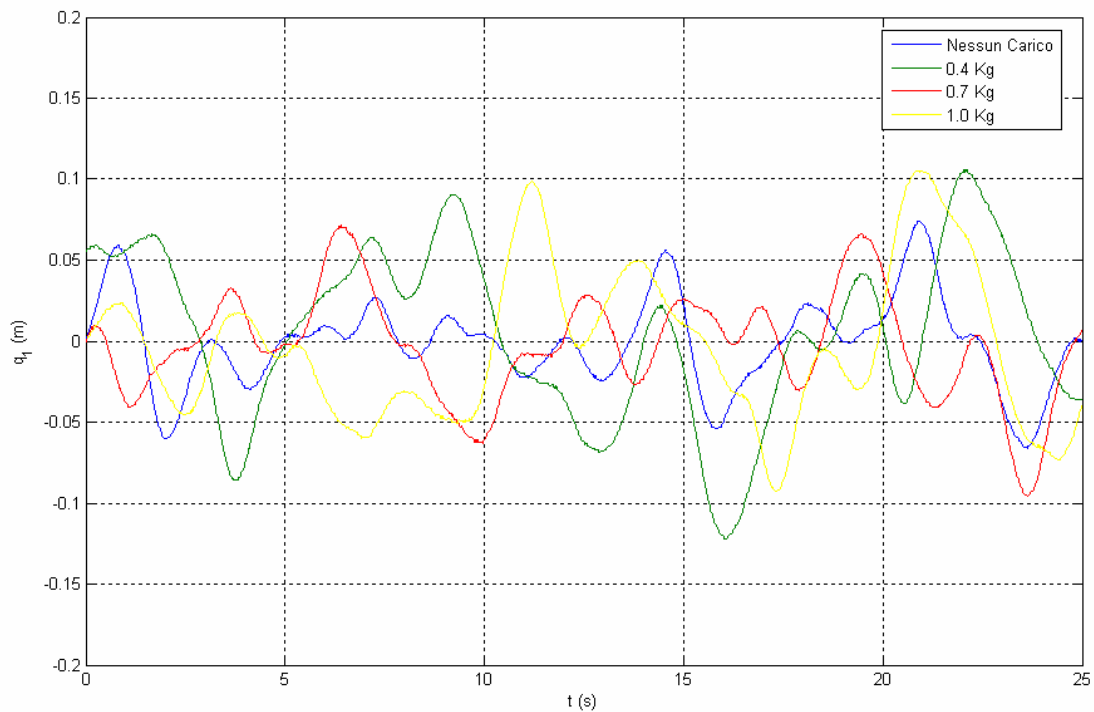
Non essendo ancora disponibile una piattaforma composta da più velivoli, si è ritenuto comunque rilevante, dal punto di vista scientifico, il trasporto di carichi da parte di un singolo Quadrotor: visti i risultati ottenuti nei voli reali si è preferito sottoporre a tale prova esclusivamente il controllore  $H_\infty$  Normalized Coprime Factor.

Si è effettuata una prima sessione di test, andando a fissare il carico direttamente alla struttura del Quadrotor, come da figura.

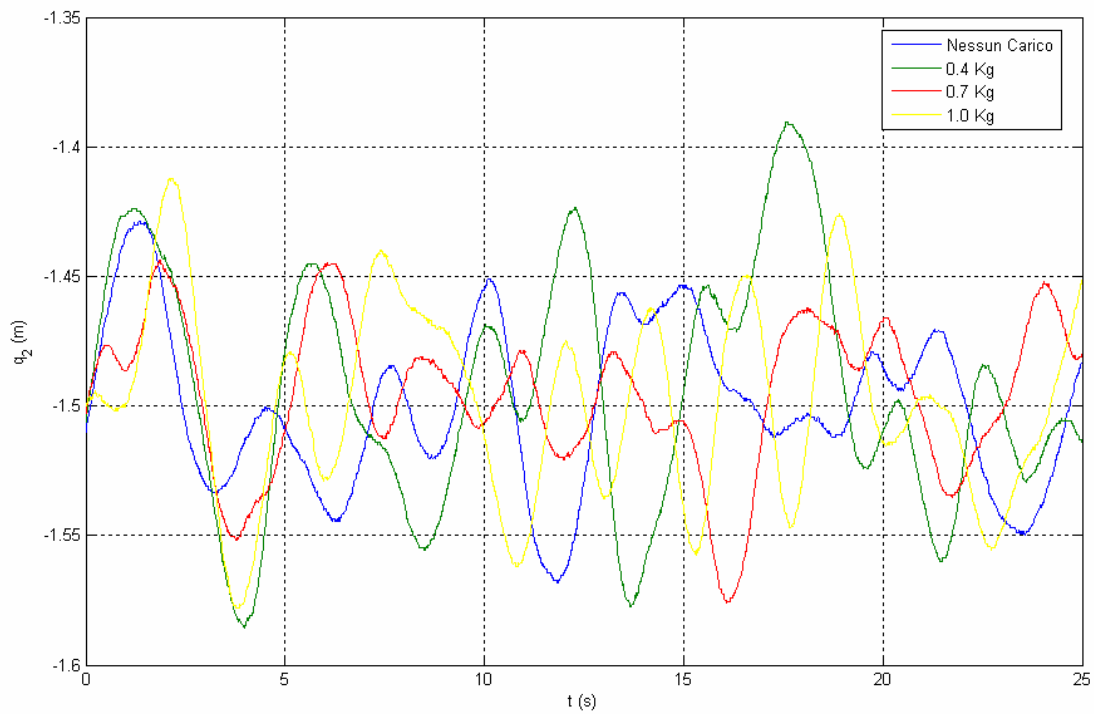


**Figura 6.2** – Carico fissato direttamente alla struttura del Quad

Si è modificata la sintesi del controllore e la sua struttura semplicemente andando ad aumentare il valore complessivo della massa del veicolo.

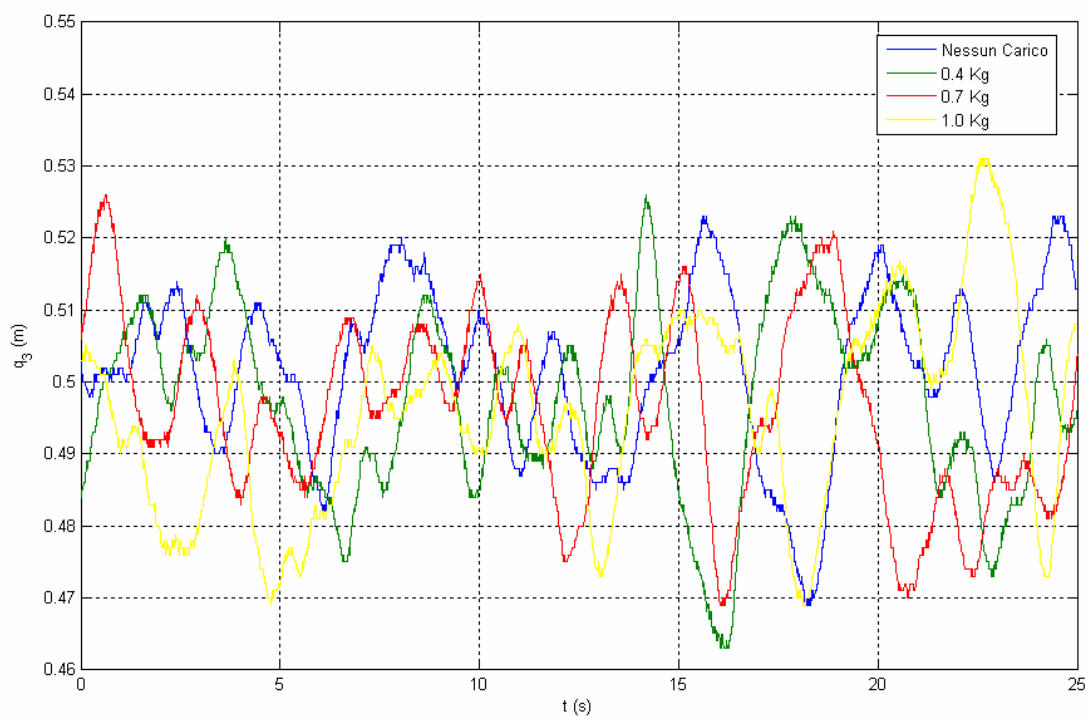


**Figura 6.3** –  $q_1$  Trasporto Carichi (Fissaggio Diretto)



**Figura 6.4 –  $q_2$  Trasporto Carichi (Fissaggio Diretto)**

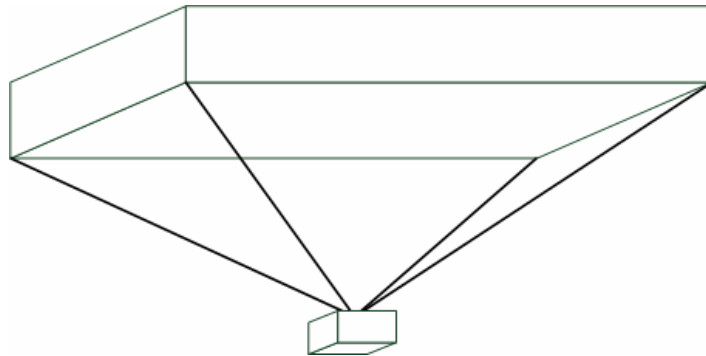
Sono stati scelti diversi tipi di carico: la precisione di hovering non ne risulta particolarmente modificata, a dimostrazione, ancora una volta, della robustezza del controllo.



**Figura 6.5 –  $q_3$  Trasporto Carichi (Fissaggio Diretto)**

## 6.2 Struttura 4 reggenti

In seconda analisi si è deciso di progettare una struttura rigida che permetta la collocazione del carico nella parte inferiore del Quadrotor.

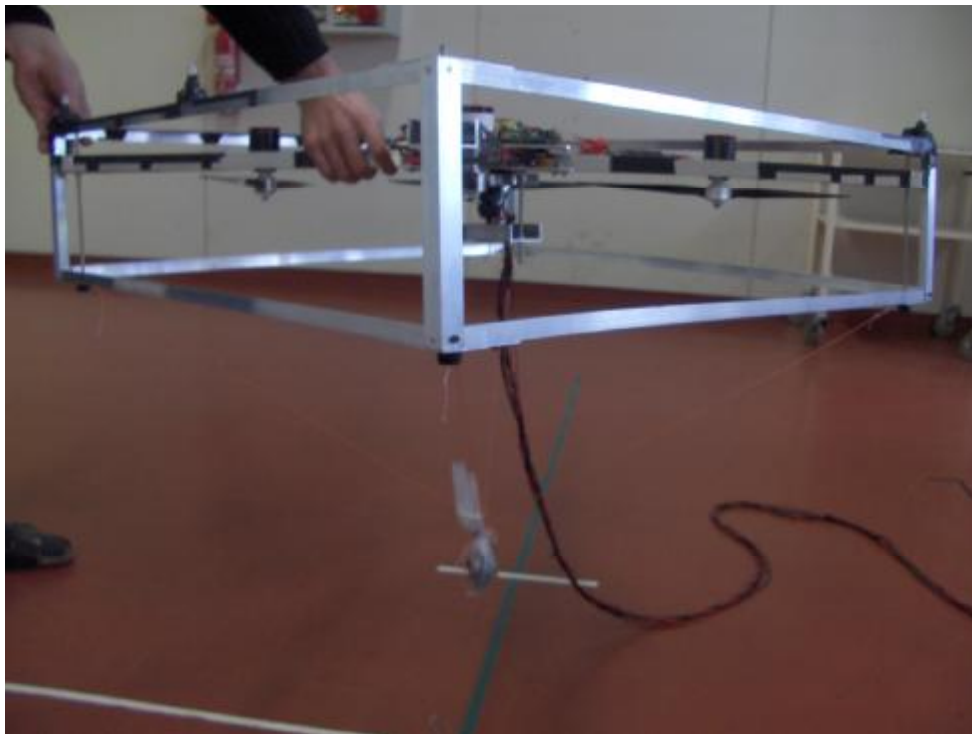


**Figura 6.6** – Carico fissato al Quad tramite struttura a 4 (ideale)

Purtroppo non vi è stato tempo a sufficienza per costruire fisicamente una struttura (come da figura) in fibra di carbonio.

Si è quindi deciso di effettuare un esperimento che provasse comunque la validità della scelta progettuale.

Si è cercato di fissare il carico utilizzato precedentemente tramite 4 fili, ponendo molta attenzione affinché ognuno di essi risultasse adeguatamente in tensione.



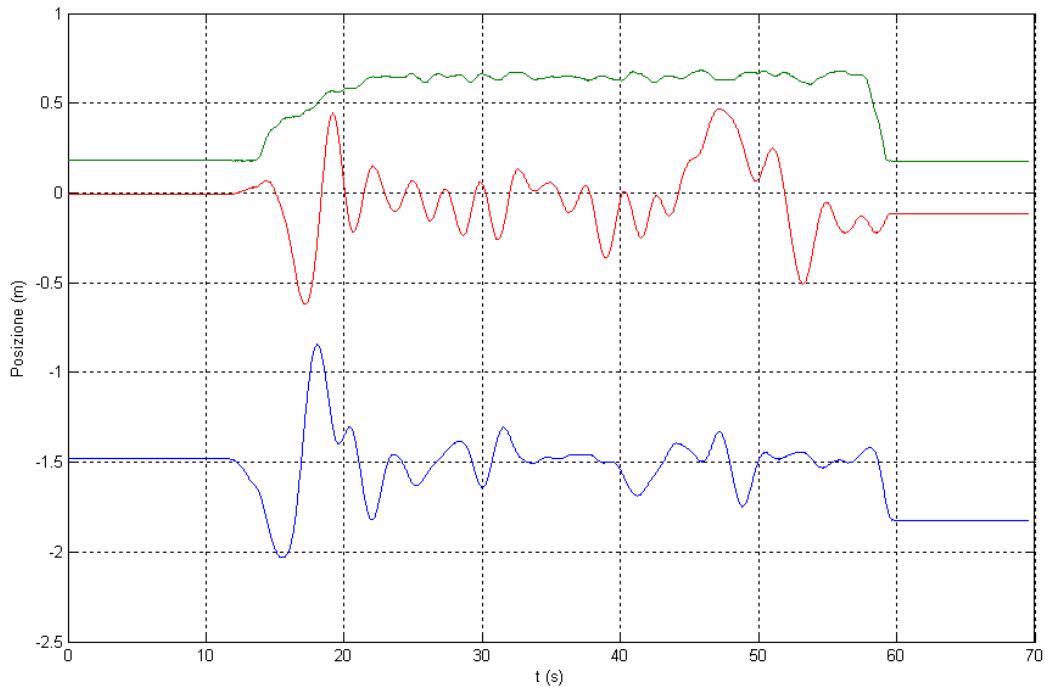
**Figura 6.7** – Carico fissato al Quad tramite struttura a 4 (reale)

Si è sviluppato infine un diverso modello, che non tenesse comunque in considerazione della possibilità di movimento del carico.

Quest'ultimo è stato semplicemente modellato come un punto massa distante dal centro di una lunghezza  $l$  (nel nostro caso 50 cm) lungo l'asse Z.

Le nuove equazioni della dinamica sono consultabili nell'appendice C.

Di seguito l'andamento della posizione:

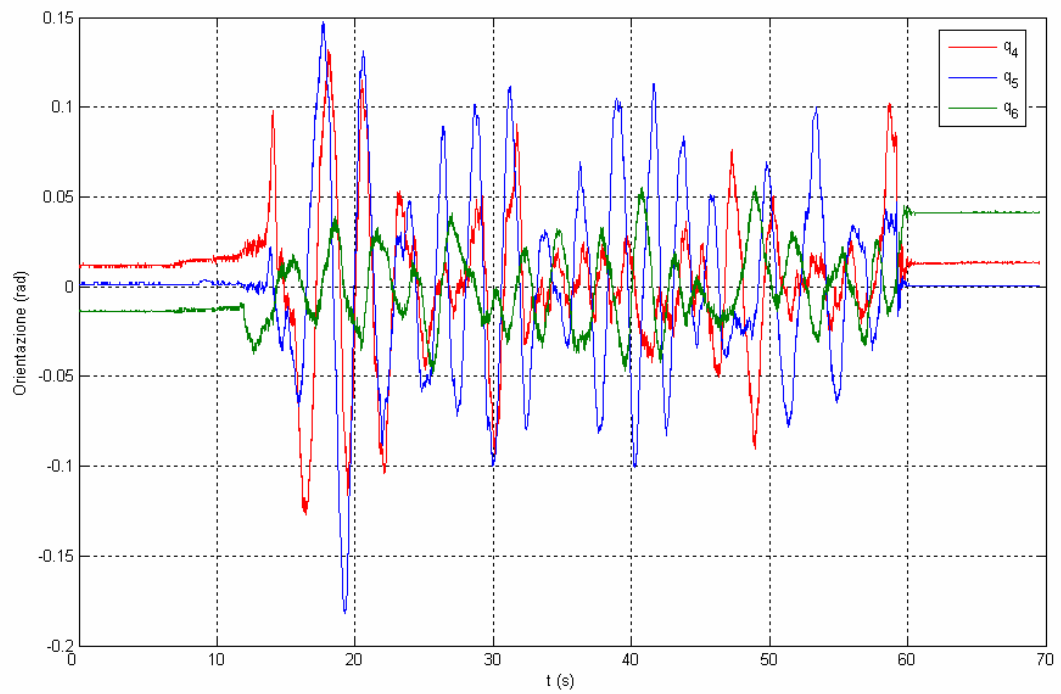


**Figura 6.8** –  $q_1, q_2, q_3$  Trasporto Carichi (Struttura a 4)

Si noti come il Quadrotor incontri difficoltà a mantenere una precisione paragonabile alla precedente.

Si suppone principale “colpevole” la troppo approssimata realizzazione di una struttura rigida attraverso 4 fili semimobili.

Si riporta infine l'andamento dell'orientazione.



**Figura 6.9** –  $q_4, q_5, q_6$  Trasporto Carichi (Struttura a 4)

## 7.1 Robustezza del controllo

L'obiettivo di questo lavoro è quello di dimostrare l'applicabilità e la validità di un controllo di tipo robusto su un velivolo autonomo non comandato: il Quadrotror.

Si è scelto di analizzare e sviluppare controllori che si basassero sulla metodologia Loop-Shaping: Loop Transfer Recovery e Normalized Coprime Factor.

Dai risultati ottenuti si può evidenziare come un controllo di tipo  $H$  infinito, in particolare di tipo  $NCF$ , risulti più performante e più versatile rispetto ad un approccio  $LTR$ .

Differenza che si rende già nota a partire dalle simulazioni, che si evidenzia ulteriormente nei voli reali e che trova, in ultima analisi, conferma dalla possibilità di un trasporto carichi senza grosse modifiche al controllore.

I risultati ottenuti dal controllore  $NCF$  sono decisamente soddisfacenti dato che la precisione si aggira su 5 cm per  $q_1$  e  $q_2$  mentre arriva addirittura a 3 cm per  $q_3$ .

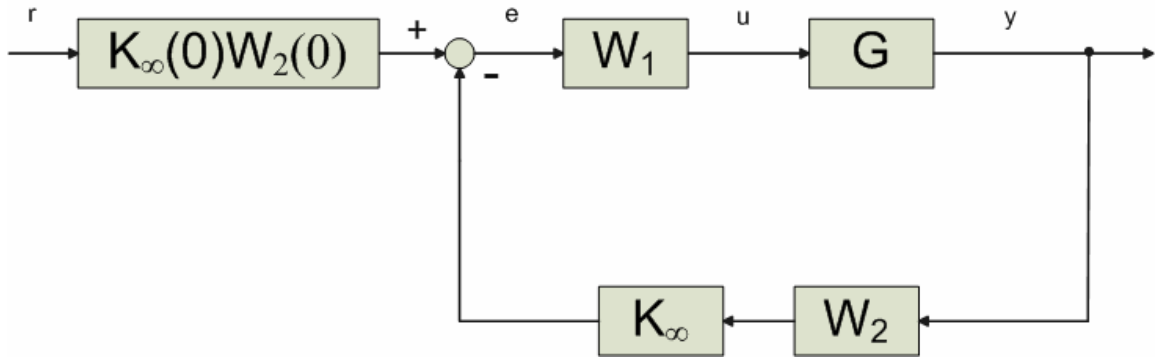
Risulta altresì di fondamentale importanza lo studio del comportamento dei motori (in particolare la valutazione dell'entità del ritardo) e lo sviluppo consequenziale del Disturbance Observer.

## 7.2 Sviluppi futuri

Prendendo atto delle miglior performance del controllore  $NCF$  s'intende continuare su questa strada per poter raggiungere una situazione di controllo sempre più ottimale (anche in prospettiva di voli outdoor, dove interverranno fattori esterni di disturbo come il vento, assenti ovviamente, in laboratorio).

Come suggerito in [1], [3] e [4] può risultare valida una modifica alla struttura del controllore.





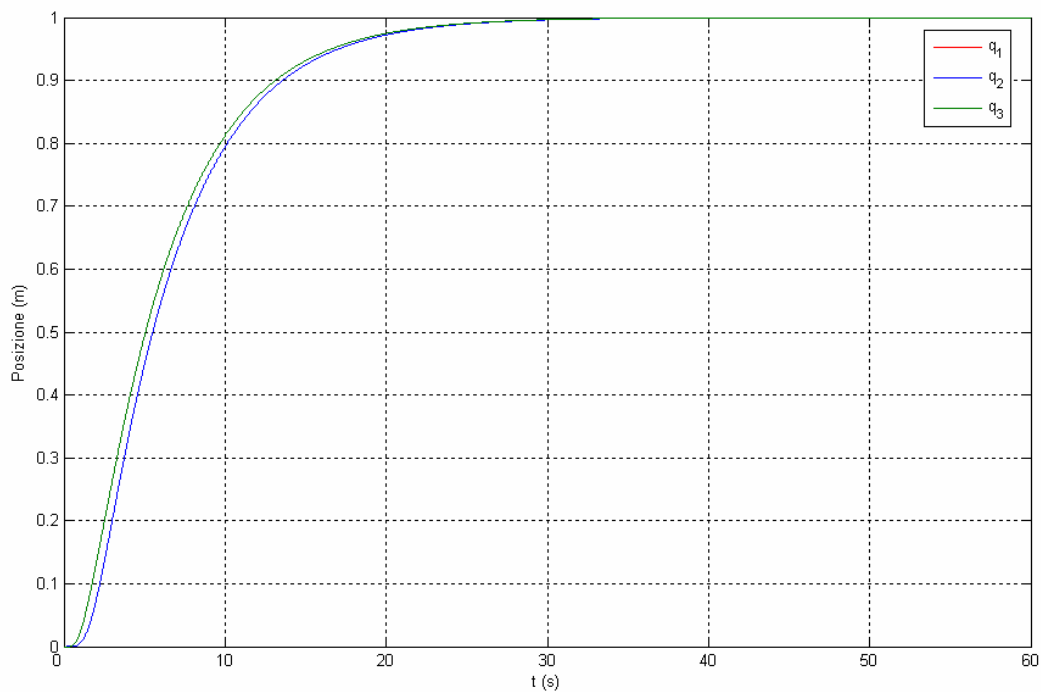
**Figura 7.1** – Framework alternativa NCF

Una prima fase di studio su questa nuova struttura è stata effettuata andando a strutturare  $W_1$  e  $W_2$  nel seguente modo:

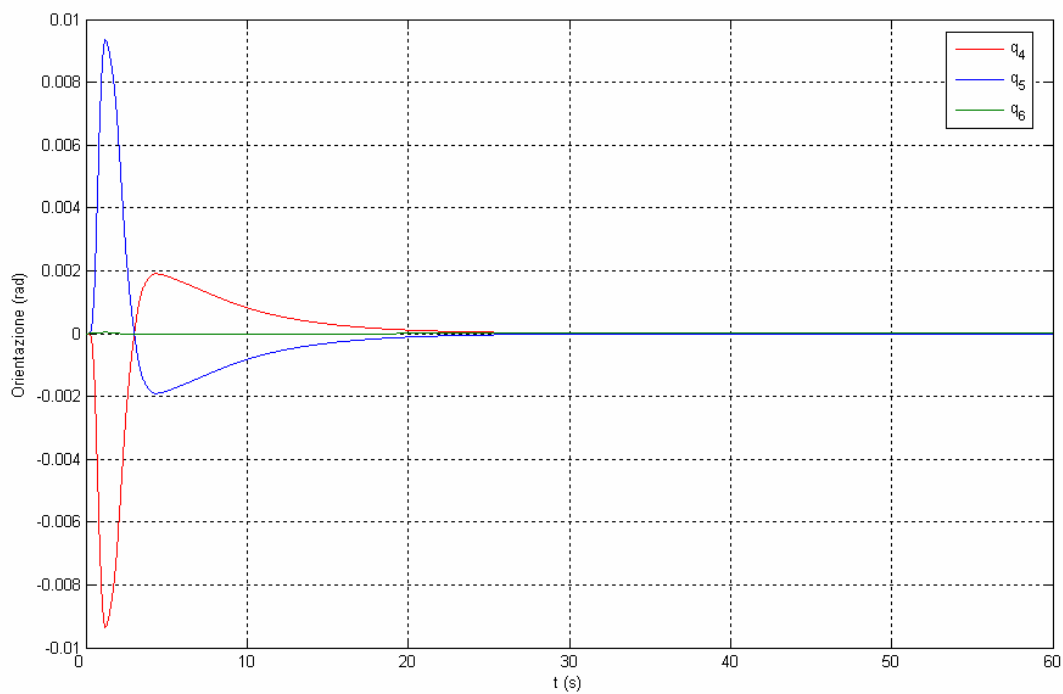
$$\begin{aligned}
 W_1 &= \begin{bmatrix} K_1 \frac{s+1.06}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 \frac{s+1.06}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \frac{s+1.06}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_4 \frac{s+1.06}{s} \end{bmatrix} \\
 W_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{filtro} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{filtro} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{filtro} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{filtro} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{filtro} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{filtro} \end{bmatrix} \quad (7.1) \\
 \text{filtro} &= \frac{987}{s^2 + 44.43s + 987}
 \end{aligned}$$

I guadagni  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  sono stati scelti come da paragrafo 5.8, mentre il filtro è stato scelto in via sperimentale: lo zero viene posto in modo che non influenzi i valori singolari.

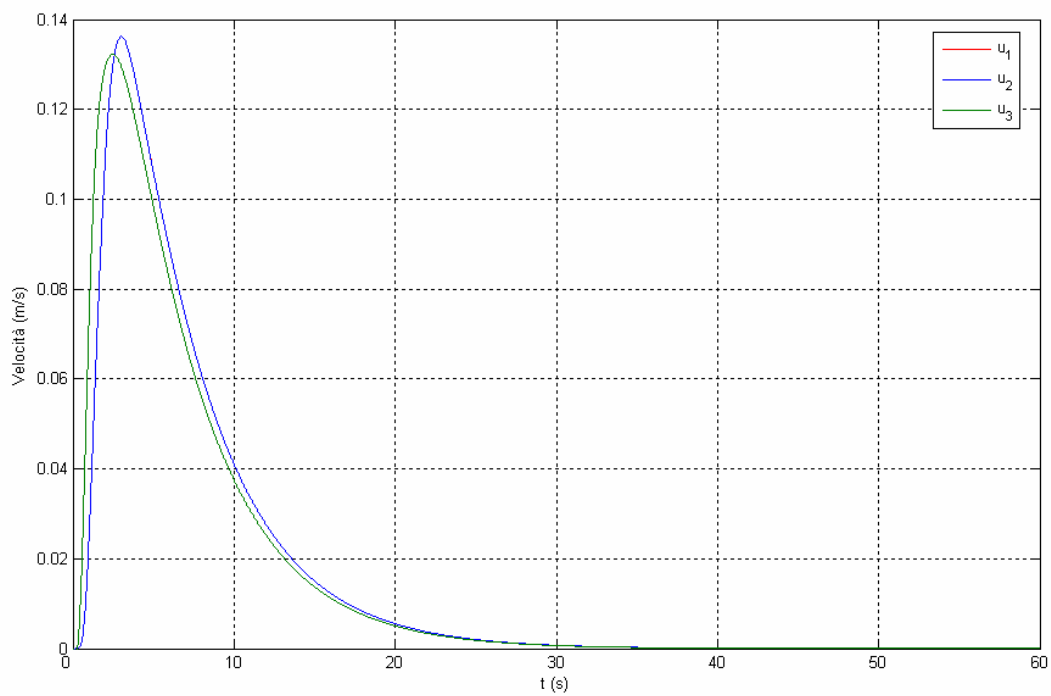
Dai risultati in simulazione si può notare come le differenze rispetto alla struttura classica siano minime. Non è detto però che questo non sia sufficiente per avere miglie in caso di volo reale di 1 o 2 cm.



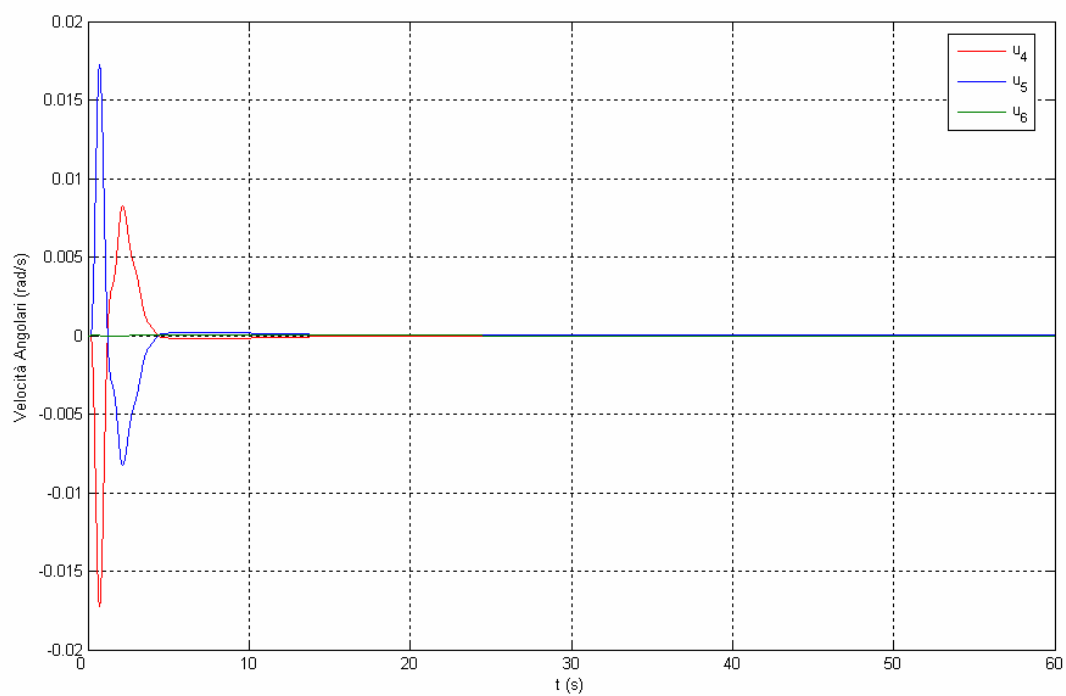
**Figura 7.2** –  $q_1, q_2, q_3$  NCF framework alternativa



**Figura 7.3** –  $q_4, q_5, q_6$  NCF framework alternativa



**Figura 7.4** –  $u_1, u_2, u_3$  NCF framework alternativa



**Figura 7.5** –  $u_4, u_5, u_6$  NCF framework alternativa

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] McFarlane D. C., Glover K., **Robust Controller Design using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions**, Springer-Verlag, 1989.
- [2] McFarlane D.C., Glover K. ,“A Loop Shaping Design Procedure using Synthesis” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 6, pp. 759- 769, June 1992.
- [3] Hyde R.A.,  **$H_{\infty}$  Aerospace Control Design - A VSTOL Flight Application** Springer-Verlag, 1995.
- [4] La Civita M., “Integrated Modeling and Robust Control for Full-Envelope Flight of Robotic Helicopters” Ph.D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 2003.
- [5] La Civita M., Papageorgiou G., Messner W. C, Kanade T., ”Design and Flight Testing of a High-Bandwidth H-infinity Loop Shaping Controller for a Robotic Helicopter” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, March-April 2006, pp. 485-494.
- [6] Saberi A., Chen B. , Sannuti P., **Loop transfer recovery : analysis and design** Springer-Verlag London, 1993
- [7] Doyle J., Stein G., “Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classic/Modern Synthesis”,*IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, no. 2, February 1992.
- [8] Hong K., Nam K. ,“A Load Torque Compensation Scheme Under the Speed Measurement Delay” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 45, no. 2, April 1998.
- [9] Zhong Q.C., Normey-Rico J.E.,“Control of integral processes with dead-time.Part 1: Disturbance observer-based 2DOF control scheme.” *IEEE Process and Control Theory Appl.*, vol. 149, no. 4, April 2002.
- [10] Zhong Q.C., Mirkin L. “Control of integral processes with dead-time.Part 2: Quantitative analysis.” *IEEE Process and Control Theory Appl.*, vol. 149, no. 4, July 2002.

- 
- [11] Zhong Q.C. "Control of integral processes with dead-time.Part 3: Deadbeat Disturbance response." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 1, January 2003.
- [12] Zhong Q.C. , Wang B. , Rees D. "Control of integral processes with dead-time.Part 4: various issues about PI controllers." *IEEE Process and Control Theory Appl.*, vol. 153, no. 3, May 2006.
- [13] Kondak K., Deeg C. , Hommel G., Musial M. , Remuß V., "Mechanical model and control of an autonomous small size helicopter with a stiff main rotor," *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2004.
- [14] Kondak K., Bernard M., Hommel G., Kopanov D. "High performance position control of an autonomous small size helicopter," *IASTED Int. Conf. on Robotics and Applications*, 2005.
- [15] Kondak K., Bernard M. , Losse N., Hommel G., "Elaborated modelling and control for autonomous small size helicopters," *ISR/ROBOTIK 2006 Joint conference on robotics*, 2006.
- [16] Glover K. , "All Optimal Hankel Norm Approximation of Linear Multivariable Systems, and Their L - error Bounds," *Int. J. Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1145-1193, 1984.
- [17] Safonov M. G., Chiang R. Y., Limebeer D. J. N., "Optimal Hankel Model Reduction for Nonminimal Systems," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 35, no. 4, April 1990, pp. 496-502.
- [18] Kalman R.E. "A new approach to linear filtering and prediction problems", *Trans. on ASME., journal of basic engineering*, 82 series D: 35-45, 1960.
- [19] Matlab 7.0 Robust Control Toolbox User's Guide, the MathWorks Inc., 2006.

## APPENDICE A

---

Si riporta il listato MatLab dove si realizza il modello non lineare, la sua linearizzazione, il filtro di Kalman, il controllore LTR e il controllore NCF.

```
syms T1 T2 T3 F3 u1 u2 u3 u4 u5 u6 q1 q2 q3 q4 q5 q6
```

```
I = 0.254;  
MF= 4.995;  
L = 0.565/2;  
G = 9.83;
```

```
q1p = u1;  
q2p = u2;  
q3p = u3;  
q4p = -(sin(q6)*u5-cos(q6)*u4)/cos(q5);  
q5p = sin(q6)*u4 + cos(q6)*u5;  
q6p = u6 + tan(q5)*(sin(q6)*u5-cos(q6)*u4);
```

```
u1p = (F3*sin(q5))/MF;  
u2p = (-F3*sin(q4)*cos(q5))/ MF;  
u3p = (F3*cos(q4)*cos(q5) - G*MF )/ MF;  
u4p = (T1 - I*u5*u6)/ I;  
u5p = (T2 + I*u4*u6)/ I;  
u6p = T3/ 2/I;
```

```
B = jacobian([q1p; q2p; q3p; q4p; q5p; q6p; u1p; u2p; u3p; u4p; u5p; u6p], [F3 T1 T2 T3 ]);  
B_0=subs(B,{u1,u2,u3,u4,u5,u6,q1,q2,q3,q4,q5,q6},{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0});
```

```
B_0=double(B_0);
```

```
A = jacobian([q1p; q2p; q3p; q4p; q5p; q6p; u1p; u2p; u3p; u4p; u5p; u6p], [q1 q2 q3 q4 q5 q6  
u1 u2 u3 u4 u5 u6]);  
A_0=subs(A,{u1,u2,u3,u4,u5,u6,q1,q2,q3,q4,q5,q6,F3},{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,MF*9.83});
```

```
A_0=double(A_0);
```

```
sys_0 = ss(A_0,B_0,eye(12),0);
```

```
G_KF = eye(12);  
H_KF = zeros(12);
```

```
sys_KF = ss(sys_0.A,[sys_0.B G_KF],eye(12),[zeros(12,4) H_KF]);
```

---

```

Qn = eye(12) * 0.0001;

Qn(9,9) = 0.25;
Qn(10,10) = 0.25;
Qn(11,11) = 0.25;
Qn(12,12) = 0.25;

Rn = eye(10)*0.001 ;

sensors = [1 2 3 6 7 8 9 10 11 12];

known = [1 2 3 4];

[KF,L_KF,P] = kalman(sys_KF,Qn,Rn,[],sensors,known);

A_0=[A_0,zeros(12,3);-1*eye(3),zeros(3,12)];
A_0=[A_0,zeros(15,1);[0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]];
B_0=[B_0;zeros(4,4)];

sys_0 = ss(A_0,B_0,eye(16),0);

delay = [0.15 0.15 0.15 0.15];
order = [2 2 2 2];

sys_0.inputdelay = delay;
sys_0 = pade(sys_0,order,[],[]);

Q = diag(100,100,1,1,1,10,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,1,0.2,0.2,1,1);

R = [ 0.005  0   0   0
      0   40  0   0
      0   0  40  0
      0   0   0  0.3];

RHO = 100;

XI = eye(24)*0.0001;
THETA = eye(16)*0.001;

weight_angle = 0.25;
weight_angle_velocity = 0.25;

THETA(4,4) = weight_angle;
THETA(5,5) = weight_angle;
THETA(6,6) = weight_angle;
THETA(10,10) = weight_angle_velocity;
THETA(11,11) = weight_angle_velocity;
THETA(12,12) = weight_angle_velocity;

```

```
[K_lqr_0,S,e] = lqr(sys_0.A,sys_0.B,Q,R);  
[K_ltr_0,SVL,W] = ltrsyn(sys_0,K_lqr_0,XI,THETA,RHO);
```

```
W1 = [20.8913    0    0    0  
      0  0.9390    0    0  
      0    0  0.9390    0  
      0    0    0  2.1247];
```

```
[K_ncf_0,CL_0,GAM_0,INFO_0] = ncfsyn(sys_0,W1);
```



## APPENDICE B

---

Si riporta il listato AutoLev utilizzato per ottenere i due modelli: le parti in rosso sono le aggiunte necessarie per le equazioni della configurazione a 4 reggenti.

```
newtonian n
bodies f
particles load
points a,b,c,d
constants L,g,length
variables T1,T2,T3,
variables F3
```

```
mass f = mf
mass load = ml
```

```
inertia f, I,I,2*I
```

```
variables q{6}',u{6}'
```

```
q1' = u1
q2' = u2
q3' = u3
```

```
dircos(n,f,body123,q4,q5,q6)
```

```
w_f_n> = u4*f1> + u5*f2> + u6*f3>
kindiffs(n,f,body123,q4,q5,q6)
alf_f_n> = dt(w_f_n>,n)
```

```
p_no_fo> = q1*n1> + q2*n2> + q3*n3>
```

```
v_fo_n> = dt(p_no_fo>,n)
a_fo_n> = dt(v_fo_n>,n)
```

```
p_fo_a> = L*f1>
p_fo_b> = L*f2>
p_fo_c> = -L*f1>
p_fo_d> = -L*f2>
p_fo_load> = length*f3>
```

```
v2pts(n,f,fo,a)
v2pts(n,f,fo,b)
v2pts(n,f,fo,c)
v2pts(n,f,fo,d)
v2pts(n,f,fo,load)
```

---

```
a2pts(n,f,fo,a)
a2pts(n,f,fo,b)
a2pts(n,f,fo,c)
a2pts(n,f,fo,d)
a2pts(n,f,fo,load)
```

```
gravity(-g*n3>)
```

```
force(fo,F3*f3>)
```

```
torque(f,T3*f3>)
```

```
torque(f,T2*f2>)
```

```
torque(f,T1*f1>)
```

```
zero = fr() + frstar()
```

```
kane()
```

```
solve(explicit(zero),[u1',u2',u3',u4',u5',u6'])
```

## APPENDICE C

Si riportano per completezza le espressioni utilizzate per descrivere la dinamica del Quadrotor in presenza della struttura rigida.

$$\begin{aligned} \mathbf{u1p} = & \text{length} * \text{ML} * \cos(q5) * ((\sin(q6) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) ^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \\ & \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)))) * (\text{T1} + \text{G} * \text{length} * \text{ML} * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) - (\text{I} - \\ & \text{ML} * \text{length}^2) * \mathbf{u5} * \mathbf{u6}) - (\cos(q6) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) ^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) - \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q4) \\ & * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)))) * (\text{G} * \text{length} * \text{ML} * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) - \\ & \text{T2} - (\text{I} - \\ & \text{ML} * \text{length}^2) * \mathbf{u4} * \mathbf{u6})) / (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q6) * \cos(q5) ^2 * (\cos(q6) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) ^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * \cos(q5) ^2 * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * \sin \\ & (\sin(q6) - \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) ^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * ((\sin(q6) \\ & ) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) ^2) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q \\ & 6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) - \\ & \text{length}^4 * \text{ML}^4 * \cos(q5) ^2 * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q \\ & 4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) ^2) - \\ & (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) ^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) ^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) ^2) - \\ & (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \\ & \cos(q6)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))) - \\ & (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q5) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * \sin(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin \\ & (q6) * \cos(q4)) - (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * \cos(q6) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) \\ & - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) * ((\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) \\ & * \sin(q5) * \cos(q6)) - (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)))) * (\text{G} * \text{MF} + \text{G} * \text{ML} - \text{F3} * \cos(q4) * \cos(q5) - \\ & \text{length} * \text{ML} * (\cos(q4) * \cos(q5) * (\mathbf{u4}^2 + \mathbf{u5}^2) - (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * \mathbf{u5} * \mathbf{u6} - \end{aligned}$$

**u2p =**

$$\begin{aligned} & \text{length} * \text{ML} * ((\text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q6) * \cos(q5)^2 * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5)) * \cos(q6)) \\ & + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) - (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))) * (\text{T1} + \text{G} * \text{length} * \text{ML} * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) - (\text{I} - \text{ML} * \text{length}^2) * u5 * u6) + (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * \cos(q5)^2 * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\sin(q_6) \cos(q_4) + \sin(q_4) \sin(q_5) \cos(q_6)) * ((MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4))^2 - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \\
& \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6)) * (\cos(q_4) \cos(q_6) - \\
& \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6))) * (G * \text{length} * ML * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6)) - T_2 - (I - \\
& ML * \text{length}^2 * u_4 * u_6)) / (\text{length}^2 * ML^2 * \cos(q_6) \cos(q_5)^2 * (\cos(q_6) * ((MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4))^2 - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * \sin(q_6) * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \\
& \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6))) + \text{length}^2 * ML^2 * \sin(q_6) \cos(q_5)^2 * ((MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) * \sin(q_6) - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * \sin(q_6) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6))^2 - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * \cos(q_6) * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \\
& \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6))) + \text{length}^2 * ML^2 * (\sin(q_6) \cos(q_4) + \sin(q_4) \sin(q_5) \cos(q_6)) * ((\sin(q_6) \\
& ) * \cos(q_4) + \sin(q_4) \sin(q_5) \cos(q_6)) * ((MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4))^2 + \text{length}^2 * ML^2 * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6)) * (\cos(q_4) \cos(q_6) - \\
& \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6))) - \\
& \text{length}^4 * ML^4 * \cos(q_5)^2 * (\sin(q_6) * (\sin(q_6) \cos(q_4) + \sin(q_4) \sin(q_5) \cos(q_6)) + \cos(q_6) * (\cos(q_4) \cos(q_6) - \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6)))^2 - \\
& (MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) * ((MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4))^2 - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6))^2 - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * (\cos(q_4) \cos(q_6) - \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6)) * (\text{length}^2 * ML^2 * (\cos(q_4) \cos(q_6) - \\
& \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6)) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6))^2 - \\
& (MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) * (\cos(q_4) \cos(q_6) - \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6)) - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) * (\sin(q_6) \cos(q_4) + \sin(q_4) \sin(q_5) \cos(q_6)) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6)))) - \\
& ((\text{length}^2 * ML^2 * (MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) * \cos(q_5)^2 + \text{length}^2 * ML^2 * (MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4))^2 + \text{length}^2 * ML^2 * (MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6))^2 - (MF + ML)^2 * (I + ML * \text{length}^2)^2 - \\
& \text{length}^4 * ML^4 * \cos(q_5)^2 * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) + \sin(q_6) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \\
& \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6)))^2 * (F_3 * \sin(q_4) \cos(q_5) + \text{length} * ML * (\sin(q_4) \cos(q_5) * (u_4^2 + u_5^2) \\
& + (\sin(q_6) \cos(q_4) + \sin(q_4) \sin(q_5) \cos(q_6)) * u_4 * u_6 + (\cos(q_4) \cos(q_6) - \\
& \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6)) * u_5 * u_6)) + \text{length}^2 * ML^2 * \cos(q_5) * ((MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) * \cos(q_6) * (\sin(q_6) \cos(q_4) + \sin(q_4) \sin(q_5) \cos(q_6)) - \\
& (MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) * \sin(q_6) * (\cos(q_4) \cos(q_6) - \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6)) - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) + \sin(q_6) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \\
& \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6))) * ((\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) * (\sin(q_6) \cos(q_4) + \sin(q_4) \sin(q_5) \cos(q_6)) - \\
& (\sin(q_4) \sin(q_6) - \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6)) * (\cos(q_4) \cos(q_6) - \\
& \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6)))) * (F_3 * \sin(q_5) - \text{length} * ML * (\cos(q_5) \cos(q_6) * u_4 * u_6 - \\
& \sin(q_6) \cos(q_5) * u_5 * u_6 - \sin(q_5) * (u_4^2 + u_5^2))) - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * ((MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) * (\cos(q_4) \cos(q_6) - \\
& \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6)) + (MF + ML) * (I + ML * \text{length}^2) * (\sin(q_6) \cos(q_4) + \sin(q_4) \sin(q_5) \cos(q_6)) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6)) - \\
& \text{length}^2 * ML^2 * \cos(q_5)^2 * (\sin(q_6) * (\sin(q_6) \cos(q_4) + \sin(q_4) \sin(q_5) \cos(q_6)) + \cos(q_6) * (\cos(q_4) \cos(q_6) - \\
& \sin(q_4) \sin(q_5) \sin(q_6))) * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) + \sin(q_6) * (\sin(q_4) \sin(q_6) - \sin(q_5) \cos(q_4) \cos(q_6)))) * (G * MF + G * ML - F_3 * \cos(q_4) \cos(q_5) - \\
& \text{length} * ML * (\cos(q_4) \cos(q_5) * (u_4^2 + u_5^2) - (\sin(q_4) \cos(q_6) + \sin(q_5) \sin(q_6) \cos(q_4)) * u_5 * u_6 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\sin(q_4) * \sin(q_6) * \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6)) * u_4 * u_6) / ((MF + ML) * (length^2 * ML^2 * \cos(q_6) * \cos(q_5)^2 * (\cos(q_6) * \\ & (MF + ML) * (I + ML * length^2) - length^2 * ML^2 * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4))^2 - \\ & length^2 * ML^2 * \sin(q_6) * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \\ & \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))) + length^2 * ML^2 * \sin(q_6) * \cos(q_5)^2 * ((MF + ML) * (I + ML * length^2) * \sin(q_6) - \\ & length^2 * ML^2 * \sin(q_6) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))^2 - \\ & length^2 * ML^2 * \cos(q_6) * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \\ & \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))) + length^2 * ML^2 * (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) * ((\sin(q_6) \\ & ) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) * ((MF + ML) * (I + ML * length^2) - \\ & length^2 * ML^2 * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4))^2 + length^2 * ML^2 * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6)) * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6))) - \\ & length^4 * ML^4 * \cos(q_5)^2 * (\sin(q_6) * (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) + \cos(q_6) * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)))^2 - \\ & (MF + ML) * (I + ML * length^2) * ((MF + ML) * (I + ML * length^2) - \\ & length^2 * ML^2 * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4))^2 - \\ & length^2 * ML^2 * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))^2 - \\ & length^2 * ML^2 * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)) * (length^2 * ML^2 * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))^2 - \\ & (MF + ML) * (I + ML * length^2) * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)) - \\ & length^2 * ML^2 * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))))); \end{aligned}$$

$$\mathbf{u3p} =$$

$$\begin{aligned} & \text{length} * \text{ML} * ((\text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q5)^2 * \cos(q6)^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) \\ & + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * \cos(q6) * \cos(q5)^2 * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q6) \\ & * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) ^2 - \\ & (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) * (\text{T1} + \text{G} * \text{length} * \text{ML} * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) - (\text{I} - \\ & \text{ML} * \text{length}^2) * u5 * u6) + (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6)^2 * \cos(q5)^2 * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * \cos(q6) * \cos(q5)^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) \\ & ) * \sin(q6) * \cos(q4)) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) ^2 - \\ & (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \\ & \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) * (\text{G} * \text{length} * \text{ML} * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) - \text{T2} - (\text{I} - \\ & \text{ML} * \text{length}^2) * u4 * u6) / (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q6) * \cos(q5)^2 * (\cos(q6) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) ^2 - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * \cos(q5)^2 * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * \sin \\ & (q6) - \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) ^2 - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * ((\sin(q6) \\ & ) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) ^2 + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q \\ & 6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q6))) - \\
& \text{length}^4 * \text{ML}^4 * \cos(q5)^2 * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))))^2 - \\
& (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4))^2 - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))^2 - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\
& \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)))^2 - \\
& (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \\
& \cos(q6)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)))) - \\
& ((\text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * \cos(q5)^2 + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \\
& \text{length}^2) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6))^2 + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))^2 - (\text{MF} + \text{ML})^2 * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2)^2 - \\
& \text{length}^4 * \text{ML}^4 * \cos(q5)^2 * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))))^2 * (\text{G} * \text{MF} + \text{G} * \text{ML} - \text{F3} * \cos(q4) * \cos(q5) - \\
& \text{length} * \text{ML} * (\cos(q4) * \cos(q5) * (\text{u4}^2 + \text{u5}^2) - (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * \text{u5} * \text{u6} - \\
& (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * \text{u4} * \text{u6})) - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q5) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * \sin(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) - (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * \cos(q6) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) \\
& - \\
& \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) * ((\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \\
& \sin(q5) * \cos(q6)) - (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\
& \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)))) * (\text{F3} * \sin(q5) - \text{length} * \text{ML} * (\cos(q5) * \cos(q6) * \text{u4} * \text{u6} - \\
& \sin(q6) * \cos(q5) * \text{u5} * \text{u6} - \sin(q5) * (\text{u4}^2 + \text{u5}^2))) - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\cos \\
& (q4) * \cos(q6) - \\
& \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) + (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q5)^2 * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\
& \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) * (\cos(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) + \sin(q6) * (\sin(q4) * \\
& \sin(q6) - \\
& \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)))) * (\text{F3} * \sin(q4) * \cos(q5) + \text{length} * \text{ML} * (\sin(q4) * \cos(q5) * (\text{u4}^2 + \text{u5}^2) + (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * \text{u4} * \text{u6} + (\cos(q4) * \cos(q6) - \\
& \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * \text{u5} * \text{u6}))) / ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q6) * \cos(q5)^2 * (\cos(q6) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4))^2 - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\
& \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * \cos(q5)^2 * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * \sin(q6) - \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)))^2 - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\
& \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * ((\sin(q6) * \\
& \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\
& \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4))^2 + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\
& \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) - \\
& \text{length}^4 * \text{ML}^4 * \cos(q5)^2 * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))))^2 - \\
& (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4))^2 - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))^2 - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))^2 - \\ & (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \\ & \cos(q6)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u4p} = & -((\text{MF} + \text{ML}) * (((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q5)^2 * \cos(q6)^2 - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6))^2 - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))^2 * (\text{T1} + \text{G} * \text{length} * \text{ML} * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) - (\text{I} - \\ & \text{ML} * \text{length}^2) * \mathbf{u5} * \mathbf{u6}) - \text{length} * \text{ML} * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * \sin(q6) * \cos(q5) * (\text{F3} * \sin(q5) - \\ & \text{length} * \text{ML} * (\cos(q5) * \cos(q6) * \mathbf{u4} * \mathbf{u6} - \sin(q6) * \cos(q5) * \mathbf{u5} * \mathbf{u6} - \sin(q5) * (\mathbf{u4}^2 + \mathbf{u5}^2))) - \\ & \text{length} * \text{ML} * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * (\text{F3} * \sin(q4) * \cos(q5) + \text{length} * \text{ML} * (\sin(q4) * \cos(q5) * (\mathbf{u4}^2 + \mathbf{u5}^2) + (\sin(q6) * \\ & \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * \mathbf{u4} * \mathbf{u6} + (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * \mathbf{u5} * \mathbf{u6})) - \\ & \text{length} * \text{ML} * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\text{G} * \text{MF} + \text{G} * \text{ML} - \\ & \text{F3} * \cos(q4) * \cos(q5) - \text{length} * \text{ML} * (\cos(q4) * \cos(q5) * (\mathbf{u4}^2 + \mathbf{u5}^2) - \\ & (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * \mathbf{u5} * \mathbf{u6} - (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * \mathbf{u4} * \mathbf{u6})) - \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q6) * \cos(q6) * \cos(q5)^2 - \\ & (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) - \\ & (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) * (\text{G} * \text{length} * \text{ML} * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) - \text{T2} - (\text{I} - \\ & \text{ML} * \text{length}^2) * \mathbf{u4} * \mathbf{u6})) + \text{length}^3 * \text{ML}^3 * (\cos(q5) * ((\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * \\ & (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) + (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * (\cos(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) + \sin(q6) * (\sin(q4) * \\ & \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)))) * (\text{F3} * \sin(q5) - \text{length} * \text{ML} * (\cos(q5) * \cos(q6) * \mathbf{u4} * \mathbf{u6} - \\ & \sin(q6) * \cos(q5) * \mathbf{u5} * \mathbf{u6} - \\ & \sin(q5) * (\mathbf{u4}^2 + \mathbf{u5}^2))) + (\cos(q6) * \cos(q5)^2 * (\sin(q6) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) \\ & + \cos(q6) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6))) - (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * ((\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \\ & \sin(q5) * \cos(q6)) - (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)))) * (\text{F3} * \sin(q4) * \cos(q5) + \text{length} * \text{ML} * (\sin(q4) * \cos(q5) * (\mathbf{u4}^2 + \mathbf{u5}^2) + (\sin(q6) * \\ & \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) * \mathbf{u4} * \mathbf{u6} + (\cos(q4) * \cos(q6) - \\ & \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)) * \mathbf{u5} * \mathbf{u6})) + (\cos(q6) * \cos(q5)^2 * (\cos(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) + \sin(q6) * (\sin(q4) * \\ & \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q6) * \cos(q4) + \sin(q4) * \sin(q5) * \cos(q6)) - (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * (\cos(q4) * \cos(q6) - \sin(q4) * \sin(q5) * \sin(q6)))) * (\text{G} * \text{MF} + \text{G} * \text{ML} - \\ & \text{F3} * \cos(q4) * \cos(q5) - \text{length} * \text{ML} * (\cos(q4) * \cos(q5) * (\mathbf{u4}^2 + \mathbf{u5}^2) - \\ & (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * \mathbf{u5} * \mathbf{u6} - (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6)) * \mathbf{u4} * \mathbf{u6}))) / (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q6) * \cos(q5)^2 * (\cos(q6) * ((\text{MF} + \text{ML}) * \\ & (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4))^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \\ & \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * \cos(q5)^2 * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * \sin(q6) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \sin(q6) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \sin(q5) * \cos(q4) * \cos(q6))^2 - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * \cos(q6) * (\sin(q4) * \cos(q6) + \sin(q5) * \sin(q6) * \cos(q4)) * (\sin(q4) * \sin(q6) - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) * ((\sin(q_6) \\ & ) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4))^2) + \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q_4) * \cos(q_6) \\ & + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6)) * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \\ & \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6))) - \\ & \text{length}^4 * \text{ML}^4 * \cos(q_5)^2 * (\sin(q_6) * (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) + \cos(q_6) * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)))^2 - \\ & (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * ((\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4))^2 - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))^2) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)) * (\text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \\ & \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))^2 - \\ & (\text{MF} + \text{ML}) * (\text{I} + \text{ML} * \text{length}^2) * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)) - \\ & \text{length}^2 * \text{ML}^2 * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \\ & \cos(q_6)) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))))); \end{aligned}$$

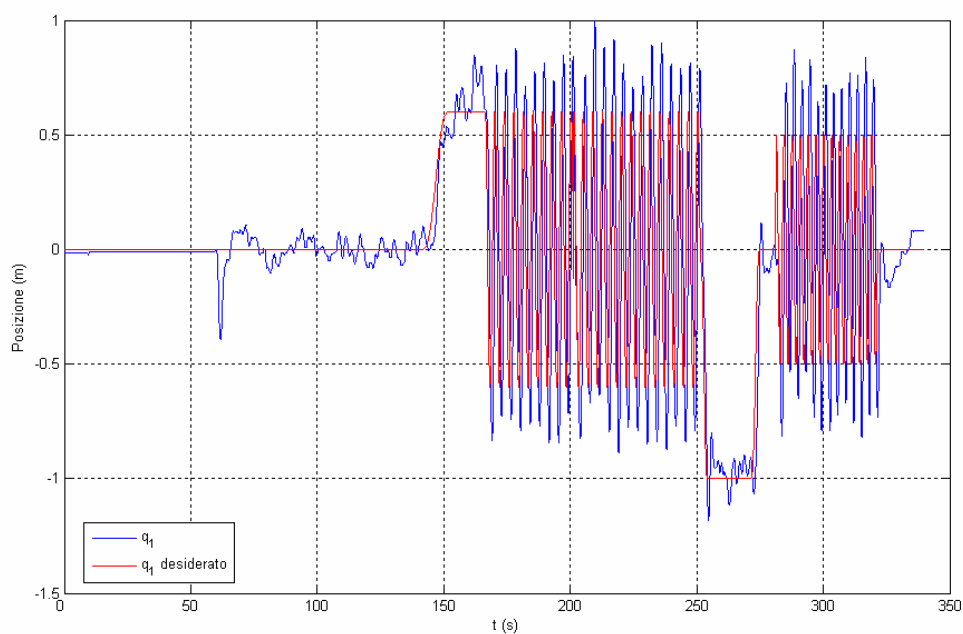
$$\begin{aligned} \mathbf{u5p} = & ((\mathbf{MF} + \mathbf{ML}) * (\text{length} * \mathbf{ML} * (\mathbf{I} + \mathbf{ML} * \text{length}^2) * \cos(q_5) - \cos(q_6) * (\mathbf{F3} * \sin(q_5) - \\ & \text{length} * \mathbf{ML} * (\cos(q_5) * \cos(q_6) * u_4 * u_6 - \sin(q_6) * \cos(q_5) * u_5 * u_6 - \\ & \sin(q_5) * (u_4^2 + u_5^2)))) + ((\mathbf{MF} + \mathbf{ML}) * (\mathbf{I} + \mathbf{ML} * \text{length}^2) - \text{length}^2 * \mathbf{ML}^2 * \sin(q_6)^2 * \cos(q_5)^2 - \\ & \text{length}^2 * \mathbf{ML}^2 * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4))^2 - \\ & \text{length}^2 * \mathbf{ML}^2 * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \\ & \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6))^2) * (\mathbf{G} * \text{length} * \mathbf{ML} * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6)) - \mathbf{T2} - (\mathbf{I} - \\ & \mathbf{ML} * \text{length}^2) * u_4 * u_6) - \\ & \text{length} * \mathbf{ML} * (\mathbf{I} + \mathbf{ML} * \text{length}^2) * (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) * (\mathbf{F3} * \sin(q_4) * \cos(q_5) \\ & + \text{length} * \mathbf{ML} * (\sin(q_4) * \cos(q_5) * (u_4^2 + u_5^2) + (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) * u_4 * u_6 \\ & + (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)) * u_5 * u_6)) - \\ & \text{length} * \mathbf{ML} * (\mathbf{I} + \mathbf{ML} * \text{length}^2) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6)) * (\mathbf{G} * \mathbf{MF} + \mathbf{G} * \mathbf{ML} - \\ & \mathbf{F3} * \cos(q_4) * \cos(q_5) - \text{length} * \mathbf{ML} * (\cos(q_4) * \cos(q_5) * (u_4^2 + u_5^2) - \\ & (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * u_5 * u_6 - (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \\ & \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6)) * u_4 * u_6)) - \text{length}^2 * \mathbf{ML}^2 * (\sin(q_6) * \cos(q_6) * \cos(q_5)^2 - \\ & (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6)) - \\ & (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \\ & \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6))) * (\mathbf{T1} + \mathbf{G} * \text{length} * \mathbf{ML} * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) - (\mathbf{I} - \\ & \mathbf{ML} * \text{length}^2) * u_5 * u_6)) - \\ & \text{length}^3 * \mathbf{ML}^3 * (\cos(q_5) * ((\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) + \sin(q_6) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \\ & \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))) + (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \\ & \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)) * (\sin(q_6) * (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) + \cos(q_6) * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)))) * (\mathbf{F3} * \sin(q_5) - \text{length} * \mathbf{ML} * (\cos(q_5) * \cos(q_6) * u_4 * u_6 - \\ & \sin(q_6) * \cos(q_5) * u_5 * u_6 - \sin(q_5) * (u_4^2 + u_5^2)))) - \\ & (\sin(q_6) * \cos(q_5)^2 * (\sin(q_6) * (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) + \cos(q_6) * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \\ & \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6))) + (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * ((\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) * (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) - (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \\ & \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6)) * (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \\ & \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)))) * (\mathbf{F3} * \sin(q_4) * \cos(q_5) + \text{length} * \mathbf{ML} * (\sin(q_4) * \cos(q_5) * (u_4^2 + u_5^2) + (\sin(q_6) * \cos(q_4) + \sin(q_4) * \sin(q_5) * \cos(q_6)) * u_4 * u_6 + (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \\ & \sin(q_4) * \sin(q_5) * \sin(q_6)) * u_5 * u_6)) - \\ & (\sin(q_6) * \cos(q_5)^2 * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) * \cos(q_6) + \sin(q_5) * \sin(q_6) * \cos(q_4)) + \sin(q_6) * (\sin(q_4) * \sin(q_6) - \sin(q_5) * \cos(q_4) * \cos(q_6))) - (\cos(q_4) * \cos(q_6) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q6))*((\sin(q4)*\cos(q6)+\sin(q5)*\sin(q6)*\cos(q4))*(\sin(q6)*\cos(q4)+\sin(q4)* \\
& \sin(q5)*\cos(q6))-(\sin(q4)*\sin(q6)-\sin(q5)*\cos(q4)*\cos(q6))*(\cos(q4)*\cos(q6)- \\
& \sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q6))))*(G*MF+G*ML-F3*\cos(q4)*\cos(q5)- \\
& \text{length}*ML*(\cos(q4)*\cos(q5)*(u4^2+u5^2)-(\sin(q4)*\cos(q6)+\sin(q5)*\sin(q6)*\cos(q4))*u5*u6- \\
& (\sin(q4)*\sin(q6)- \\
& \sin(q5)*\cos(q4)*\cos(q6))*u4*u6)))/(\text{length}^2*ML^2*\cos(q6)*\cos(q5)^2*(\cos(q6))*((MF+ML)* \\
& (I+ML*\text{length}^2)-\text{length}^2*ML^2*(\sin(q4)*\cos(q6)+\sin(q5)*\sin(q6)*\cos(q4))^2)- \\
& \text{length}^2*ML^2*\sin(q6)*(\sin(q4)*\cos(q6)+\sin(q5)*\sin(q6)*\cos(q4))*(\sin(q4)*\sin(q6)- \\
& \sin(q5)*\cos(q4)*\cos(q6)))+\text{length}^2*ML^2*\sin(q6)*\cos(q5)^2*((MF+ML)*(I+ML*\text{length}^2)*s \\
& \sin(q6)-\text{length}^2*ML^2*\sin(q6)*(\sin(q4)*\sin(q6)-\sin(q5)*\cos(q4)*\cos(q6))^2- \\
& \text{length}^2*ML^2*\cos(q6)*(\sin(q4)*\cos(q6)+\sin(q5)*\sin(q6)*\cos(q4))*(\sin(q4)*\sin(q6)- \\
& \sin(q5)*\cos(q4)*\cos(q6)))+\text{length}^2*ML^2*(\sin(q6)*\cos(q4)+\sin(q4)*\sin(q5)*\cos(q6))*((\sin(q6) \\
& )*\cos(q4)+\sin(q4)*\sin(q5)*\cos(q6))*((MF+ML)*(I+ML*\text{length}^2)- \\
& \text{length}^2*ML^2*(\sin(q4)*\cos(q6)+\sin(q5)*\sin(q6)*\cos(q4))^2)+\text{length}^2*ML^2*(\sin(q4)*\cos(q \\
& 6)+\sin(q5)*\sin(q6)*\cos(q4))*(\sin(q4)*\sin(q6)-\sin(q5)*\cos(q4)*\cos(q6))*(\cos(q4)*\cos(q6)- \\
& \sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q6))) - \\
& \text{length}^4*ML^4*\cos(q5)^2*(\sin(q6)*(\sin(q6)*\cos(q4)+\sin(q4)*\sin(q5)*\cos(q6))+\cos(q6)*(\cos(q \\
& 4)*\cos(q6)-\sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q6)))^2- \\
& (MF+ML)*(I+ML*\text{length}^2)*((MF+ML)*(I+ML*\text{length}^2)- \\
& \text{length}^2*ML^2*(\sin(q4)*\cos(q6)+\sin(q5)*\sin(q6)*\cos(q4))^2- \\
& \text{length}^2*ML^2*(\sin(q4)*\sin(q6)-\sin(q5)*\cos(q4)*\cos(q6))^2)- \\
& \text{length}^2*ML^2*(\cos(q4)*\cos(q6)-\sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q6))*(\text{length}^2*ML^2*(\cos(q4)*\cos(q6)- \\
& \sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q6))*(\sin(q4)*\sin(q6)-\sin(q5)*\cos(q4)*\cos(q6))^2- \\
& (MF+ML)*(I+ML*\text{length}^2)*(\cos(q4)*\cos(q6)-\sin(q4)*\sin(q5)*\sin(q6))- \\
& \text{length}^2*ML^2*(\sin(q4)*\cos(q6)+\sin(q5)*\sin(q6)*\cos(q4))*(\sin(q6)*\cos(q4)+\sin(q4)*\sin(q5)* \\
& \cos(q6))*(\sin(q4)*\sin(q6)-\sin(q5)*\cos(q4)*\cos(q6))));
\end{aligned}$$

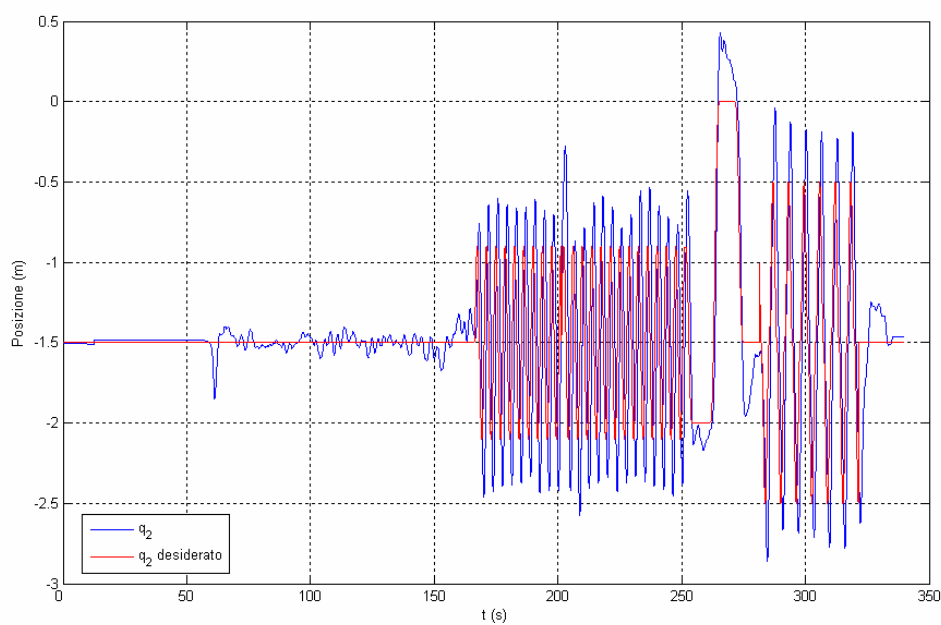
$$u6p = 0.5*T3/I;$$

## APPENDICE D

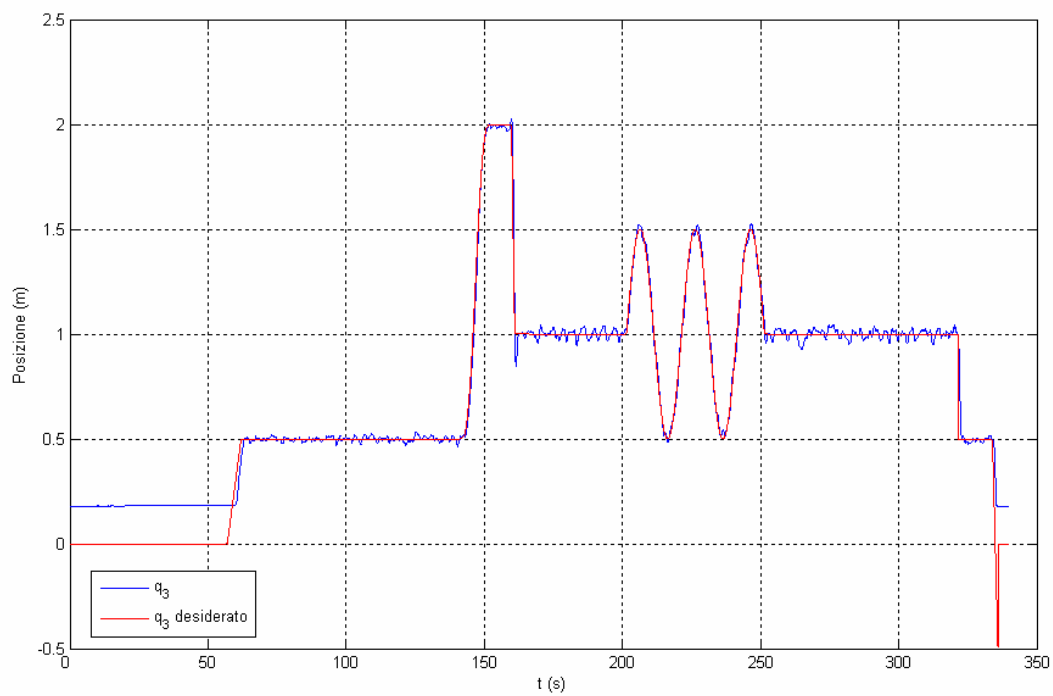
Si riportano gli andamenti di posizione e orientazione ottenuti nell'esecuzione del programma dimostrativo.



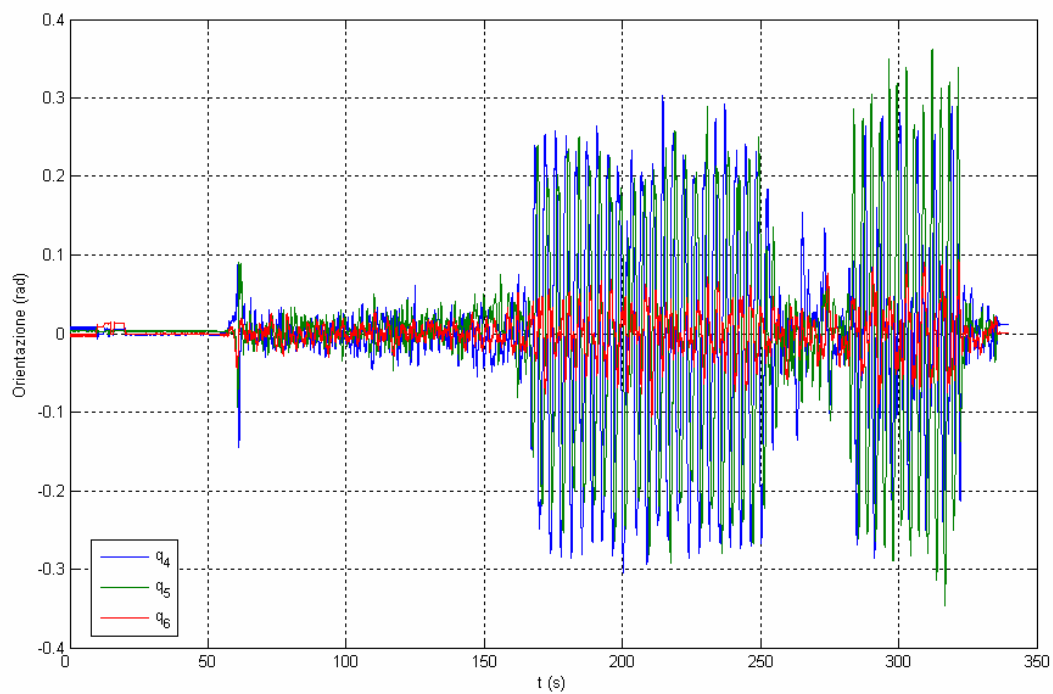
**Figura D.1**  $-q_1$  DEMO



**Figura D.2**  $-q_2$  DEMO



**Figura D.3 –  $q_3$  DEMO**



**Figura D.4 –  $q_4, q_5, q_6$  DEMO**